Zanimanje:

TEHNIČAR RAČUNARSTVA
TEHNIČAR ELEKTRONIKE

Predmet:

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Modul 5:

ANALIZA SLOŽENIH KOLA NAIZMJENIČNE STRUJE

Tuzla, septembar 2010.godine

SADRŽAJ

1.METODE RJEŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH KOLA

1.1 RJEŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH KOLA POMOĆU PRVOG I DRUGOG KIRHOFOVOG ZAKONA

Osnovni pojmovi koje je potrebno poznavati da bi mogli primijeniti za rješavanje složenih električnih kola:

- ***grana*** je dio strujnog kruga u kojem teče ista struja,
- ***čvor*** je tačka gdje se spajaju 3 ili više grana ,
- ***kontura*** se sastoji iz onoliko grana koliko je potrebno da se zatvori strujni krug . Smjer orjentacije je proizvoljan,
- ***nezavisna kontura*** je ona koja ima bar jednu granu koja ne pripada ni jednoj konturi.

Prvi Kirhofov zakon : $\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{j=1}^{k} I_j$

Vektorski zbir svih struja koje ulaze u jedan čvor jednaka je vektorskom zbiru struja koje izlaze iz čvora, ili :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I_i} = 0$$

Vektorski zbir svih struja koje ulaze odnosno izlaze iz jednog čvora jednaka je nuli. Pri tome za struje koje ulaze u čvor usvaja predznak “+”, a za struje koje izlaze iz čvora predznak “-“.

Drugi Kirhofov zakon :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E_k} - \sum_{i=1}^{m} Z_i I_i = 0$$

Vektorski zbir svih EMS, napona i padova napona u zatvorenom elekričnom kolu jednaka je nuli.

Pozitivne *ems* su one koje djeluju u smjeru obilaženja konture, a pozitivni padovi napona su oni kod kojih struja, kroz imedansu, teče istim smjerom kao i smjer obilaženja konture.

Pri rješavanju složenih električnih kola primjenom ova dva zakona postavlja se onoliko jednačina koliko imamo nepoznatih struja (*n jednačina*). Po prvom Kirhofovom zakonu se postavlja ($n_č$-*1*) jednačina, a po drugom Kirhofom zakonu
n-($n_č$-*1*) jednačina.

1.2. METODA KONTURNIH STRUJA

Metoda direktne primjene Kirhofovih zakona za rješavanje elektičnih kola, odlikuje se složenom matematičkom procedurom, koja se sastoji u rješavanju velikog broja jednačina. Zbog toga je bilo opravdano nastojanje da se definišu nove metode i metodološki postupci sa osnovnim ciljem da se smanji broj jednačina i pojednostavi procedura rješavanja.

Metoda konturnih struja takođe počiva na primjeni Kirhofovih zakona, ali je broj jednačina znatno reduciran, čime je matematička procedura značajno pojednostavljena. Metoda direktne primjene Kirhofovih zakona predstavlja konstituisanje n_g jednačina, dakle onoliko jednačina koliko ima grana, odnosno nepoznatih struja u kolu. Maksvel je definisao metodu konturnih struja, koja počiva na postavljanju $n_g - (n_č - 1)$ jednačina tj. onoliko jednačina koliko je u prethodnoj metodi postavljeno primjenom drugog Kirhofovog zakona. On je razmatranje sveo na struje u nezavisnim konturama, dok struje u zajedničkim granama za dvije i više kontura rješava kao algebarski zbir usvojenih konturnih struja.

Opšti oblik jednačine konturnih struja glasi:

$$Z_{11}I_{K1} + Z_{12}I_{K2} + \ \ldots\ldots + Z_{1k}I_{kn} = E_{K1}$$
$$Z_{21}I_{K1} + Z_{22}I_{K2} + \ \ldots\ldots + Z_{2K}I_{Kn} = E_{K2}$$
$$\vdots$$
$$Z_{k1}I_{K1} + Z_{k2}I_{K2} + \ \ldots\ldots + Z_{kK}I_{Kn} = E_{kn}$$

- Elementi:

$$Z_{ii}\ (i = 1\ldots\ldots\ldots\ldots n)$$

zovu se *sopstvene impedanse konture* i predstavljaju zbir svih impedansi koje čine *"i"* konturu. Predznak elemenata Z_{ii} je pozitivan.

- Ako su dvije grane iste konture induktivno spregnute ili dva elementa jedne grane tada u zbir sopstvene impedanse konture ulazi i dvostruka vrijednost međusobne induktivne impedanse sa odgovarajućim predznakom.

- Elementi:

$$Z_{ij}\ (i = 1\ldots\ldots\ldots\ldots n,\ j = 1\ldots\ldots\ldots\ldots n,\ \ i \neq j)$$

zovu se *međusobne impedanse* izmedju *"i"* i *"j"* konture. Predznak elementa Z_{ij} je pozitivan ako se smjerovi konturnih struja poklapaju, a negativan ako su smjerovi konturnih struja suprotni.

- Ako izmedju dvije različite grane konture *"i" i "j"* postoji induktivna sprega, tada u međusobnoj impedansi Z_{ij} postoji član međusobne induktivnosti impedansi tih grana sa odgovarajućim predznakom.

Za ove elemene vrijedi da je $Z_{ij} = Z_{ji}$.

- Elementi:

E_{Ki} $(i = 1.......n)$

zovu se *elektromotorne sile* konture i predstavljaju zbir *ems* iz ovih grana konture računajući u pozitivnom smjeru konture. U ovaj zbir ulaze i ekvivalentni naponski generatori dobiveni dualnom zamjenom strujnih generatora.

- Elementi:

$I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}, ... I_{kn}$ su konturne struje.

Redoslijed rješavanja zadatka:

Prvo se odrede nezavisne strujne konture i izvrši se proizvoljna orjentacija tih kontura. Zatim se primjenjujući opšti oblik "Metoda konturnih struja" postavi odgovarajući sistem jednačina. Rješavanjem ovog sistema jednačina izračunavamo vrijednosti konturnih struja. Struje pojedinih grana se dobijaju na sledeći način:

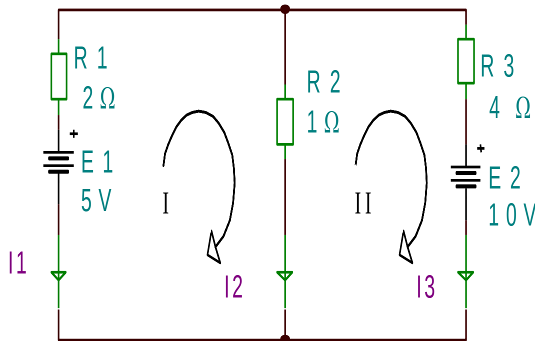
Ako struja teče kroz nezavisnu granu onda se gleda da li se njen smjer poklapa sa smjerom konture (pozitivna) ili se ne poklapa (negativna), pošto su vrijednosti iste.

Ako struja teče kroz granu koja je sastavni dio dvije konture, opet se gleda smjer struje grane sa smjerom konturnih struja. Nakon određivanja predznaka vrši se sabiranje (oduzimanje) konturih struja.

Prilikom rješavanja zadataka metodom konturnih struja, treba znati da dolazi u obzir slučajevi sa naponskim generatorom. Ukoliko imamo strujne - pretvaramo ih u naponske.

Primjer 1.2.1

Metodom konturnih struja odrediti struje u granama kola.
$E_1 = 5V, E_3 = 10V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 4\Omega$



$$(R_1 + R_2)I_I - R_2 I_{II} = E_1$$
$$-R_2 I_I + (R_2 + R_3)I_{II} = -E_3$$

$$(2+1)I_I - 1I_{II} = 5$$
$$-1I_I + (1+4)I_{II} = -10$$

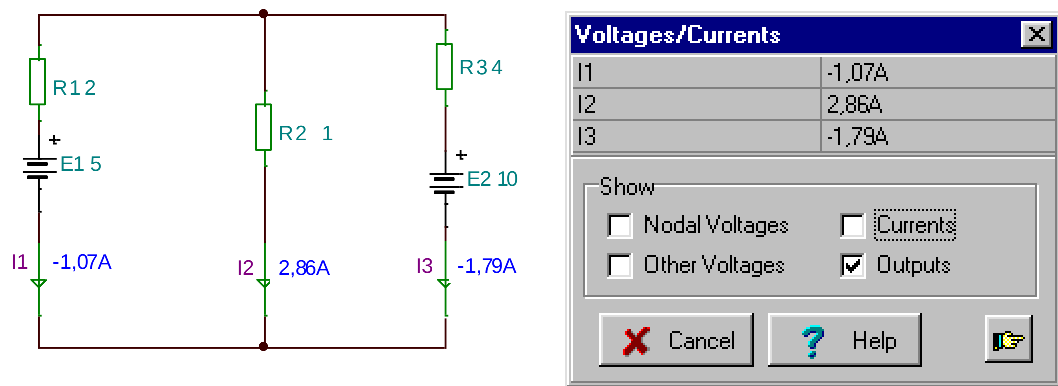
$$3I_I - 1I_{II} = 5 \Rightarrow 3I_I + 1{,}78 = 5$$
$$-1I_I + 5I_{II} = -10 /* 3$$
$$3I_I = 3{,}22 \Rightarrow I_I = 1{,}07$$

$$3I_I - 1I_{II} = 5$$
$$-3I_I + 15I_{II} = -30$$

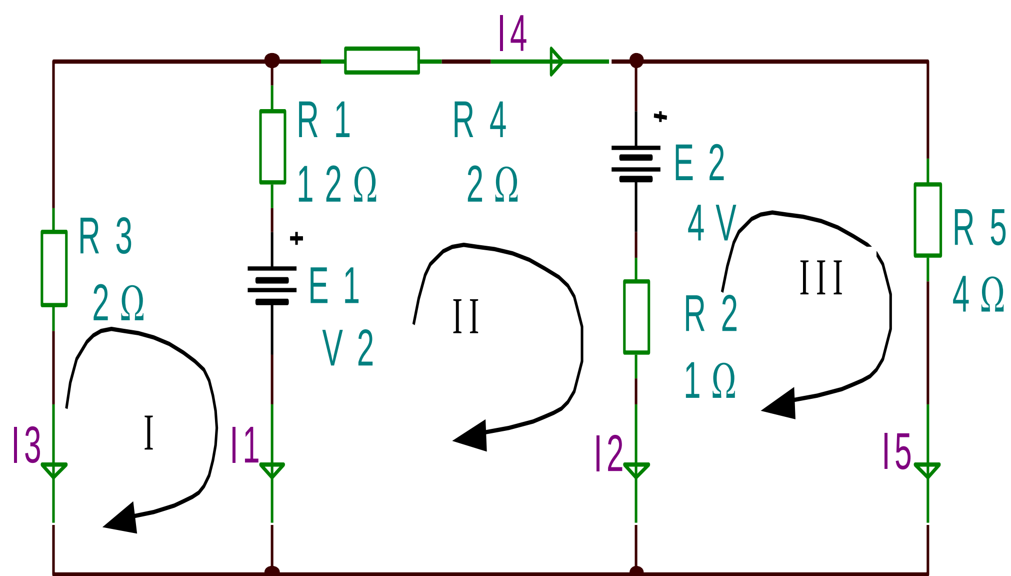
$$14I_{II} = -25$$
$$I_{II} = -\frac{25}{14} = -1{,}78[A]$$

$$I_1 = -I_I = -1{,}07[A]$$
$$I_2 = I_I - I_{II} = 1{,}07 + 1{,}78 = 2{,}85[A]$$
$$I_3 = I_{II} = -1{,}78[A]$$

Uz pomoć programa “Tina” može se uraditi simulacija ovog kola sa mjerenjem struja u granama kola. Podaci mogu biti dati kao rezultati mjerenja u šemi ili izdvojeni u posebnu tabelu.



Primjer 1.2.2.



$E_1 = 2[V] E_2 = 4[V]$

$R_1 = R_2 = 1[\Omega] R_3 = R_4 = 2[\Omega] R_5 = 4[\Omega]$

$$(R_1 + R_2)I_I - R_1 I_{II} + 0 I_{III} = -E_1$$
$$-R_1 I_I + (R_2 + R_4 + R_1)I_{II} - R_2 I_{III} = E_1 - E_2$$
$$0 I_I - R_2 I_{II} + (R_2 + R_5)I_{III} = E_2$$

$$(1+2)I_I - 1I_{II} + 0 = -2$$
$$-1I_I + (1+2+1)I_{II} - 1I_{III} = 2-4$$
$$0 - 1I_{II} + 5I_{III} = 4$$

$$3I_I - 1I_{II} = -2$$
$$-I_I + 4I_{II} - 1I_{III} = -2$$
$$-I_{II} + 5I_{III} = 4 \Rightarrow -I_{II} = 4 - 5I_{III}$$

$$3I_I - 5I_{III} + 4 = -2$$
$$-I_I + 20I_{III} - 16 - I_{III} = -2$$

$$3I_I - 5I_{III} = -6$$
$$-I_I + 19I_{III} = 14 / \bullet 3$$

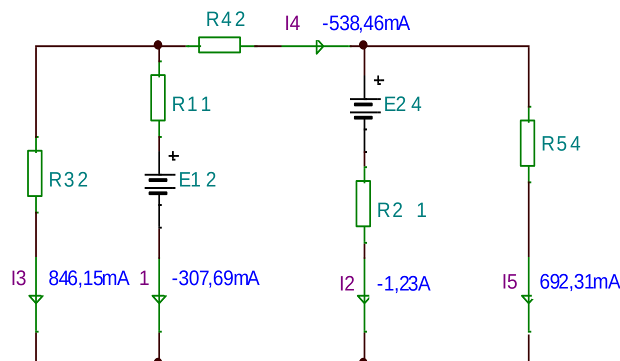
$$3I_I - 5I_{III} = -6$$
$$-3I_I + 57I_{III} = 42$$

$$52I_{III} = 36 \Rightarrow I_{III} = {}^{36}\!/_{52} = 0{,}69[A]$$
$$I_{II} = 5I_{III} - 4 = 5*0{,}69 - 4 = -0{,}55[A]$$

$$-I_I + 19I_{III} = 14$$
$$-I_I + 19*0{,}69 = 14$$
$$-I_I = 0{,}89$$
$$I_I = -0{,}89[A]$$

$$I_1 = I_I - I_{II} = -0{,}89 + 0{,}55 = -0{,}34[A]$$
$$I_2 = I_{II} - I_{III} = -0{,}55 - 0{,}69 = -1{,}24[A]$$
$$I_3 = -I_I = -0{,}89[A]$$
$$I_4 = I_{II} = -0{,}55[A]$$
$$I_5 = I_{III} = 0{,}69[A]$$

Simulacijom kola na računaru dobivamo sledeće vrijednosti.



Voltages/Currents

I1	-307,69mA
I2	-1,23A
I3	846,15mA
I4	-538,46mA
I5	692,31mA

Show
- [ ] Nodal Voltages
- [ ] Currents
- [ ] Other Voltages
- [x] Outputs

Cancel Help

Primjer 1.2.3.

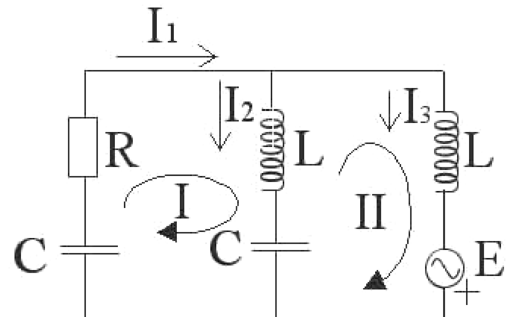
Primjenom metode konturnih struja odrediti struje u kolu:

$R = 2[\Omega]$

$X_L = 4[\Omega]$

$X_C = 2[\Omega]$

$E = 4[V]$



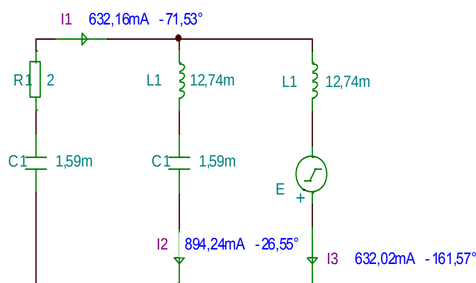
$$(R + jX_L - 2jX_C)I_I - (jX_L - jX_C)I_{II} = 0$$
$$-(jX_L - jX_C)I_I + (2jX_L - jX_C)I_{II} = E$$

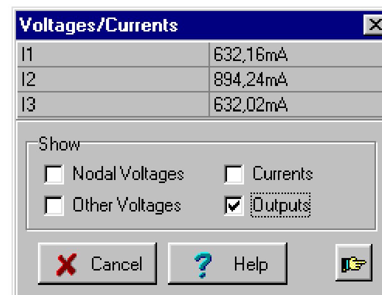
$$(2 + j4 - j4)I_I - (j4 - j2)I_{II} = 0$$
$$-(j4 - j2)I_I + (j8 - j2)I_{II} = 4$$

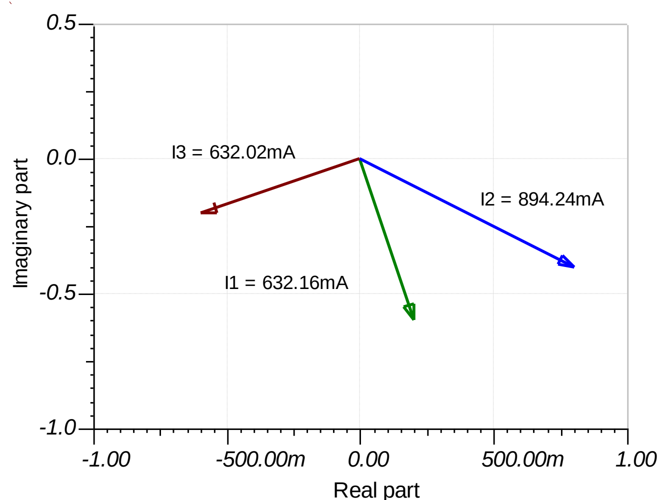
$$2I_I - j2I_{II} = 0 \qquad I_I = 0,6 + j02$$
$$-2jI_I + j6I_{II} = 4 \qquad I_{II} = 0,2 - j0,6$$

$$I_1 = I_I = 0,6 + j0,2\,[A] \qquad |I_1| = 0,632[A]$$
$$I_2 = I_I - I_{II} = 0,4 + j0,8\,[A] \qquad |I_2| = 0,894[A]$$
$$I_3 = I_{II} = 0,2 - j0,6\,[A] \qquad |I_3| = 0,632[A]$$

Poslije simulacije na računaru dobivamo:

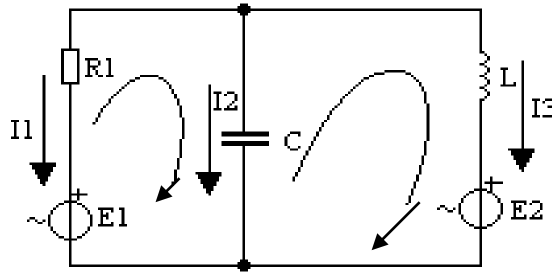






Primjer 1.2.4.

Primjenom metoda konturnih struja odrediti struje kroz pojedine grane.



$E_1 = 2V, E_2 = 3V, R = 2\Omega, X_C = 4\Omega . X_L = 3\Omega$

$$(R - jX_C)I_I - (-jX_C)I_{II} = E_1$$
$$-(-jX_C)I_I + (jX_L - X_C)I_{II} = -E_2$$

$$(2 - j4)I_I + j4I_{II} = 2$$
$$j4I_I + (j3 - j4)I_{II} = -3$$

$$(2 - j4)I_I + j4I_{II} = 2$$
$$j4I_I - JI_{II} = -3 /* 4$$

$$(2 - J4)I_I + j4I_{II} = 2$$
$$j16I_I - j4I_{II} = -12 \quad / \; +$$

$$(2 - j4)I_I + j16I_I = -10$$
$$2I_I - J4I_I + j16I_I = -10$$
$$2I_I + j12I_I = -10$$
$$I_I = \frac{-10}{2 + j12} * \frac{2 - j12}{2 - j12} = \frac{-20 + j120}{148} = -0{,}135 + j0{,}81[A]$$

$$j4(-0{,}135 + j0{,}81) - jI_{II} = -3$$
$$-j0{,}54 - 3{,}24 - jI_{II} = -3$$
$$-jI_{II} = j0{,}54 + 0{,}24$$
$$I_{II} = \frac{-j0{,}54 - 0{,}24}{j} * \frac{j}{j} = \frac{0{,}54 - j0{,}24}{-1}$$
$$I_{II} = -0{,}24 + j0{,}24[A]$$

$$I_1 = -I_I = 0{,}135 - j0{,}81[A] \qquad |I_1| = 0{,}82[A]$$
$$I_2 = I_I - I_{II} = -0{,}135 + j0{,}81 + 0{,}54 - j0{,}24 = 0{,}405 + j0{,}57[A] \qquad |I_2| = 0{,}699[A]$$
$$I_3 = I_{II} = -0{,}54 + j0{,}24[A] \qquad |I_3| = 0{,}591[A]$$

1.3.METODA POTENCIJALA ČVOROVA

Ova metoda se odnosi na kola sa strujnim izvorima. U kolu se pronađu svi čvorovi i jedan od njih se uzme za referentni. U odnosu na taj čvor se računaju potencijali drugih čvorova, kao i njihovi međusobni potencijali. Ukupan broj jednačina je $n_č$ -1 gdje je $n_č$ broj čvorova u el . kolu. Opšti oblik jednačina za jedno el.kolo je :

$$Y_{11}U_{č1} + Y_{12}U_{č2} + ...Y_{1n}U_{čn} = I_{č1}$$
$$Y_{21}U_{č1} + Y_{22}U_{č2} + ...Y_{2n}U_{čn} = I_{č2}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$Y_{n1}U_{č1} + Y_{n2}U_{č2} + ...Y_{nn}U_{čn} = I_{čn}$$

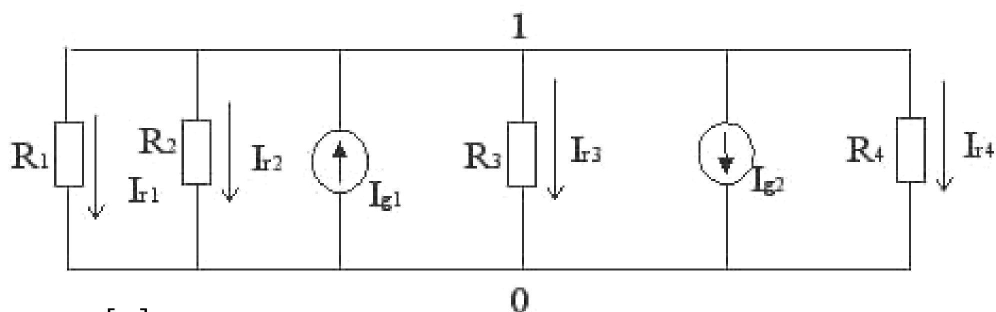
Y_{ii}....su sopstvene admitanse " i – tog " kola čvora i predstavljaju algebarski zbir admitansi onih grana koje su svojim krajem vezane za čvor " i " . Preznak im je pozitivan.

Y_{ij}....su međusobne admitanse čvorova " i " i "j" . Predznak im je negativan.

$I_{či}$ – se zovu aktivne struje čvora "i" i predstavljaju algebarski (vektorski) zbir aktivnih struja koje ulaze (izlaze) iz "i" – tog čvora . Ovdje treba voditi računa i o strujama strujnih generatora koji su dobijeni iz naponskih generatora .

Naponi U_{ij} se računaju kao $U_{ij} = V_{či} – V_{čj}$.

Primjer 1.3.1.



$R_1 = R_4 = 2[\Omega]$
$R_2 = 5[\Omega]$
$R_3 = 4[\Omega]$
$I_{G1} = 4[A]$
$I_{G2} = 3[A]$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{10}=I_{G1}-I_{G2}$$

$$(0{,}5+0{,}2+0{,}25+0{,}5)U_{10}=4-3$$

$$1{,}45U_{10}=1\Rightarrow U_{10}=0{,}69[V]$$

$$I_{R1}R_1-U_{10}=0\Rightarrow I_{R1}=\frac{U_{10}}{R_1}=\frac{0{,}69}{2}=0{,}345[A]$$

$$I_{R4}R_4-U_{10}=0\Rightarrow I_{R4}=\frac{U_{10}}{R_4}=\frac{0{,}69}{2}=0{,}345[A]$$

$$I_{R2}R_2-U_{10}=0\Rightarrow I_{R2}=\frac{U_{10}}{R_2}=\frac{0{,}69}{5}=0{,}138[A]$$

$$I_{R3}R_3-U_{10}=0\Rightarrow I_{R3}=\frac{U_{10}}{R_3}=\frac{0{,}69}{4}=0{,}1725[A]$$

Provjera:

$$I_{G1}=I_{G2}+I_{R1}+I_{R2}+I_{R3}+I_{R4}$$

$$4=3+0{,}345+0{,}138+0{,}1725+0{,}345$$

$$4=4$$

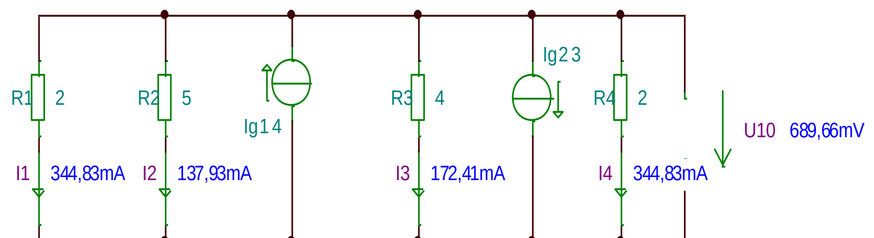
Nakon simulacije na računaru dobivamo sledeće vrijednosti za struje u kolu.

Voltages/Currents

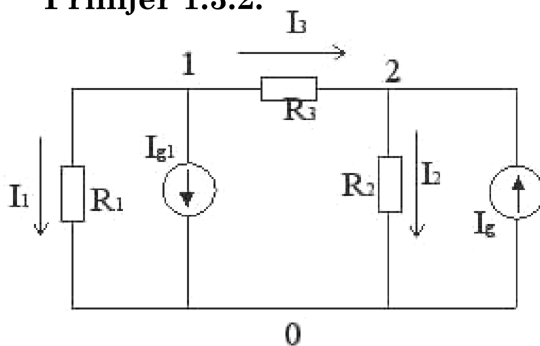
I1	344,83mA
I2	137,93mA
I3	172,41mA
I4	344,83mA
U10	689,66mV

Show
- [ ] Nodal Voltages
- [ ] Currents
- [ ] Other Voltages
- [x] Outputs

Cancel | Help



Primjer 1.3.2.



$$I_{G1}=1[A]$$
$$I_{G2}=3[A]$$
$$R_1=2[\Omega]$$
$$R_2=4[\Omega]$$
$$R_3=5[\Omega]$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)U_{10}-\frac{1}{R_3}U_{20}=-I_{G1}$$

$$-\frac{1}{R_3}U_{10}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{20}=I_{G2}$$

$$0{,}7U_{10}-0{,}2U_{20}=-1/\cdot 0{,}2$$
$$-0{,}2U_{10}+0{,}45U_{20}=3/\cdot 0{,}7$$

$$0{,}14U_{10}-0{,}04U_{20}=-0{,}2$$
$$0{,}14U_{10}+0{,}315U_{20}=2{,}1$$

$$0{,}275U_{20}=1{,}9\Rightarrow U_{20}=6{,}91[V]$$

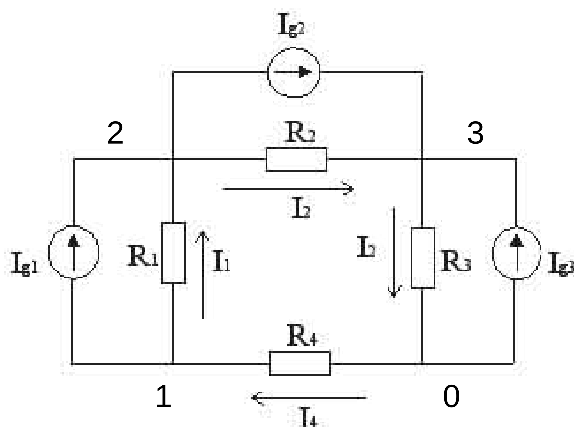
$$U_{10}=\frac{-1+0{,}2U_{20}}{0{,}7}=0{,}55[V]$$
$$U_{10}=0{,}55[V]$$

$$I_1R_1-U_{10}=0\Rightarrow I_1=\frac{U_{10}}{R_1}=\frac{0{,}5}{2}=0{,}273[A]$$
$$I_2R_2-U_{20}=0\Rightarrow I_2=\frac{U_{20}}{R_2}=\frac{6{,}91}{4}=1{,}727[A]$$
$$I_3R_3-U_{12}=0\Rightarrow I_3=\frac{U_{12}}{R_3}=\frac{U_{10}-U_{20}}{R_3}=\frac{0{,}55-6{,}91}{5}=-1{,}272[A]$$

Provjera:

$$I_1+I_{G1}=-I_3\Rightarrow 0{,}273+1\approx 1{,}272$$
$$I_3+I_{G2}=I_2\Rightarrow -1{,}272+3=1{,}727$$

Primjer 1.3.3.



$$I_{G1}=2[A]$$
$$I_{G2}=3[A]$$
$$I_{G3}=1[A]$$
$$R_1=1[\Omega]$$
$$R_2=2[\Omega]$$
$$R_3=4[\Omega]$$
$$R_4=5[\Omega]$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)U_{10}-\frac{1}{R_1}U_{20}-0\cdot U_{30}=-I_{G1}$$
$$-\frac{1}{R_1}U_{10}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)U_{20}-\frac{1}{R_2}U_{30}=I_{G1}-I_{G2}$$
$$-\frac{1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{30}=I_{G2}+I_{G3}$$

$$\begin{aligned}1{,}2U_{10}-U_{20}&=-2 \\ -U_{10}+1{,}5U_{20}-0{,}5U_{30}&=-1 \\ -0{,}5U_{20}+0{,}75U_{30}&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}U_{30}&=5{,}33[V]\\ U_{20}&=0\\ U_{10}&=-1{,}67[V]\end{aligned}$$

$$I_4R_4+U_{10}=0\Rightarrow I_4=\frac{-U_{10}}{R_4}=\frac{1{,}67}{5}=0{,}333[A]$$
$$I_3R_3-U_{30}=0\Rightarrow I_3=\frac{U_{30}}{R_3}=\frac{5{,}33}{4}=1{,}33[A]$$
$$I_1R_1-U_{12}=0\Rightarrow I_1=\frac{U_{10}-U_{20}}{R_1}=\frac{-1{,}67}{1}=-1{,}67[A]$$
$$I_2R_2-U_{23}=0\Rightarrow I_2=\frac{U_{20}-U_{30}}{R_2}=\frac{-5{,}33}{2}=-2{,}665[A]$$

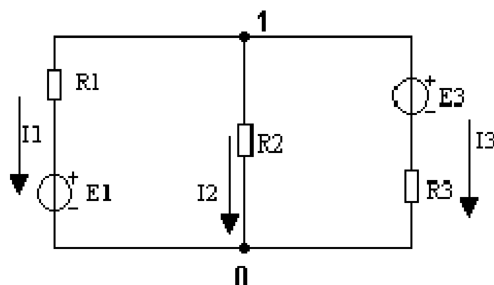
Provjera:

Čvor 1. $I_4=I_{G1}+I_1$ $0{,}333=2-1{,}67$

Čvor 3. $I_{G2}+I_{G3}+I_2=I_3$ $3+1-2{,}665=1{,}33$

Primjer 1.3.4.

Metodom potencijala čvorova odrediti struje u kolu
$E_1=5V, E_3=10V, R_1=2\Omega, R_2=1\Omega, R_3=4\Omega$



$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{10}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3}$$

$$\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}\right)U_{10}=\frac{5}{2}+\frac{10}{4}$$

$$\left(\frac{2+4+1}{4}\right)U_{10}=\frac{10+10}{4}$$

$$\frac{7}{4}U_{10}=\frac{20}{4}$$

$$7U_{10}=20\Rightarrow U_{10}=\frac{20}{7}=2{,}85[V]$$

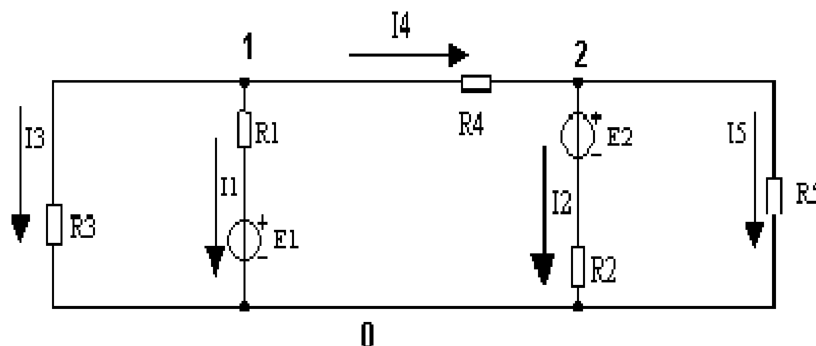
$$I_1R_1+E_1-U_{10}=0$$
$$I_1R_1=U_{10}-E_1$$
$$I_1=\frac{U_{1O}-E_1}{R_1}=\frac{2{,}85-5}{2}$$
$$I_1=-1{,}075[A]$$

$$I_3R_3+E_3-U_{10}=0$$
$$I_3R_3=U_{10}-E_3$$
$$I_3=\frac{U_{10}-E_3}{R_3}=\frac{2{,}85-10}{4}$$
$$I_3=-1{,}78[A]$$

$$I_2R_2-U_{10}=0$$
$$I_2=\frac{U_{10}}{R_2}=\frac{2{,}85}{1}$$
$$I_2=2{,}85[A]$$

Primjer 1.3.5.

Metodom potencijala čvorova odrediti struje u kolu. Poznati su podaci.
$E_1=2V, E_2=4V, R_1=R_2=1\Omega, R_3=R_4=2\Omega, R_5=4\Omega$



$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{10}-\frac{1}{R_4}U_{20}=\frac{E_1}{R_1}$$

$$-\frac{1}{R_4}U_{10}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_{20}=\frac{E_2}{R_2}$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)U_{10}-\frac{1}{2}U_{20}=\frac{2}{1}$$

$$-\frac{1}{2}U_{10}+\frac{7}{4}U_{20}=\frac{4}{1}$$

$$2U_{10}-\frac{1}{2}U_{10}=2 \quad /*2$$

$$-\frac{1}{2}U_{10}+\frac{7}{4}U_{20}=4 \quad /*4$$

$$4U_{10}-U_{20}=4 \quad /*7$$

$$-2U_{10}+7U_{20}=16$$

$$28U_{10}-7U_{20}=28$$

$$-2U_{10}+7U_{20}=16$$

$$26U_{10}=44$$

$$U_{10}=1{,}69[V]$$

$$-2U_{10}+7U_{20}=16 \Rightarrow -3{,}38+7U_{20}=16$$

$$7U_{20}=19{,}38$$

$$U_{20}=2{,}76[V]$$

$$I_3 R_3 - U_{10} = 0$$

$$I_3 = \frac{U_{10}}{R_3} = \frac{1{,}69}{2}$$

$$I_3 = 0{,}84[A]$$

$$I_4 R_4 + U_{20} - U_{10} = 0$$

$$I_4 R_4 = U_{10} - U_{20}$$

$$I_4 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_4} = \frac{1{,}69 - 2{,}76}{2}$$

$$I_4 = 0{,}53[A]$$

$$I_5 R_5 - U_{20} = 0$$

$$I_5 = \frac{U_{20}}{R_5} = \frac{2{,}76}{4}$$

$$I_5 = 0{,}69[A]$$

$$I_1 R_1 + E_1 - U_{10} = 0$$

$$I_1 R_1 = U_{10} - E_1$$

$$I_1 = \frac{U_{10} - E_1}{R_1} = \frac{1{,}69 - 2}{1}$$

$$I_1 = 0{,}31[A]$$

$$I_2 R_2 + E_2 - U_{20} = 0$$

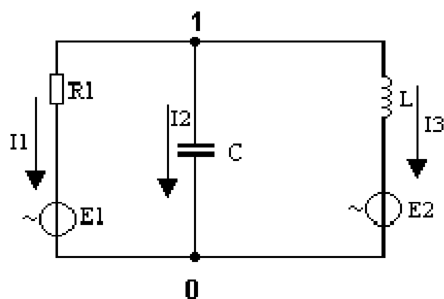
$$I_2 R_2 = U_{20} - E_2$$

$$I_2 = \frac{U_{20} - E_2}{R_2} = \frac{2{,}76 - 4}{1}$$

$$I_2 = -1{,}24[A]$$

Primjer 1.3.6.

Metodom potencijala odrediti struje u kolu
$E_1 = 2V, E_2 = 3V, R = 2\Omega, X_C = 4\Omega . X_L = 3\Omega$



$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{-jX_C}+\frac{1}{jX_L}\right)U_{10}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{jX_L}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j4}+\frac{1}{j3}\right)U_{10}=\frac{2}{2}+\frac{3}{J3}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{4-3}{j12}\right)U_{10}=1-j$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{j12}\right)U_{10}=1-j$$

$$U_{10}=\frac{1-j}{0{,}5+j0{,}083}$$

$$U_{10}=2{,}27-j1{,}62[V]$$

$$I_1R_1+E_1-U_{10}=0$$

$$I_1=\frac{U_{10}-E_1}{R_1}=\frac{2{,}27-j1{,}62-2}{2}=\frac{0{,}7-j1{,}62}{2}$$

$$I_1=0{,}135-j0{,}81[A]$$

$$I_2(-jX_C)-U_{10}=0\Rightarrow I_2=\frac{U_{10}}{-jX_C}=\frac{2{,}27-j1{,}62}{-j4}$$

$$I_2=0{,}405+j0{,}56[A]$$

$$I_3jX_L+E_2-U_{10}=0$$

$$I_3jX_L=U_{10}-E_2$$

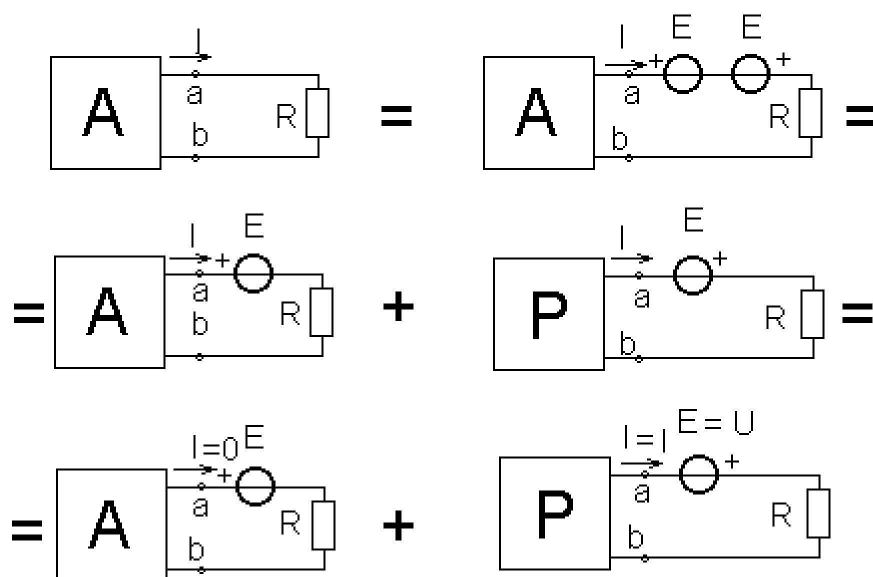
$$I_3=\frac{U_{10}-E_2}{jX_L}$$

$$I_3=\frac{2{,}27-j1{,}67-3}{j3}=\frac{-0{,}73-j1{,}67}{j3}$$

$$I_3=-0{,}54+j0{,}24[A]$$

1.4. TEVENENOVA TEOREMA

Posmatrajmo složenu linearni mrežu, proizvoljne konfiguracije, i uočimo njenu granu, ili dio grane, koji sačinjava otpornik R. Dio mreže, bez uočenog otpornika, šematski je predstavljen pravougaonikom A (simbol A znači da je mreža aktivna, tj. da sadrži proizvoljan broj naponskih i strujnih generatora u svojim granama) u gornjem lijevom kutu slike otpornik R je izdvojeno naznačen i priljučen između krajeva a i b. Krajevi a i b mogu predstavljati dva čvora posmatrane mreže ali i dvije tačke u presjeku jedne grane koja može sadržati i druge redno vezane otpornike i generatore.



Prema tevenenovoj teoremi mreža se u odnosu na krajeve a i b ponaša kao naponski generator čija je EMS E_T, jednaka naponu između krajeva a i b kada je otpornik R uklonjen, a unutrašnja otpornost generatora , R_T , je jednaka ekvivalentnoj otpronosti mreže, gledane se strane krajeva a i b kada su sve *ems* naponskih generatora i struje strujnih generatora u mreži jednake nuli.

Napon $U_{ab\,\infty}$ pri uklonjenom otporniku R ustvari predstavlja napon praznog hoda imeđu krajeva a i b dijela aktivne mreže unutar pravougaonika A. Prilikom određivanja ekvivalentne otpornosti R_T dijela mreže unutar pravougaonika, a gledano sa strane krajeva a i b elektromotorne sile svih naponskih generatora u struje strujnih generatora moraju se anulirati, ali unutrašnje otpornosti generatora moraju ostati na svojim mjestima. U slučaju idealnog strujnog generatora unutrašnja otpornost je beskonačna, pa se cijela grana koja sadrži ovakav generator može ukoniti. Mrežu iste opšte konfiguracije kao što je ona u pravougaoniku A, ali u kojoj su sve ems i struje strujnih generatora poništene, nazvaćemo pasivnom mrežom i u daljem izlaganju ćemo je označiti pravougaonikom P. prema tevenenovoj teoremi, struja u otporniku je :

$$I = \frac{E_T}{R_T + R} \qquad (4.1)$$

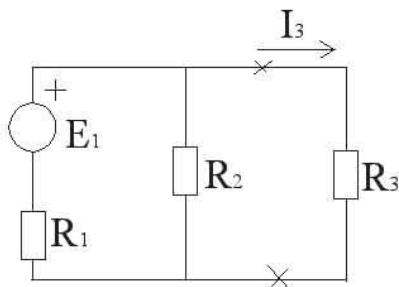
gdje je $E_T = U_{ab\,\infty}$ napon na priključcima a i b kada su ovi otvoreni.

R_T nalazimo na sljedeći način
1) otpojimo granu u kojoj tražimo struju
2) kratko spojimo sva naponske generatore , a ostavimo njihove unutrašnje otpore te nađemo ekvivalentni otpor,što je ustvari R_{T0}.

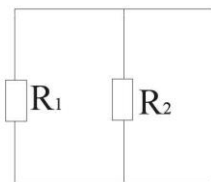
Postupak primjene Tevenenove teoreme je sljedeći:
1. Otpojimo granu kroz koju treba izračunati struju
2. Odredimo otpor između tačaka gdje smo otpojili granu tako što naponske generatore kratko spojimo a strujne otpojimo ostavljajući pri tome njihove unutrašnje otpore.
3. Odredimo E_T kao napon između tačaka gdje smo otpojili granu i
4. Izračunamo struju po formuli I = $\frac{E_T}{R_T + R}$, gdje je

I – struja koju računamo
R – otpor u grani kroz koju teče struja koju računamo.
E_T i R_T je definisano u gornjem djelu teksta.

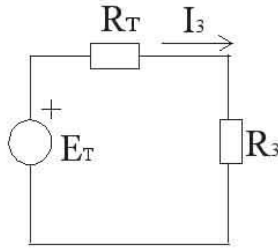
Primjer 1.4.1.



$E_1 = 2[V]$
$R_1 = 1[\Omega]$
$R_2 = 2[\Omega]$
$R_3 = 3[\Omega]$



$$R_T = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}67[\Omega]$$



$$I(R_2 + R_1) = -E_1$$

$$I = \frac{-E_1}{R_1 + R_2}$$

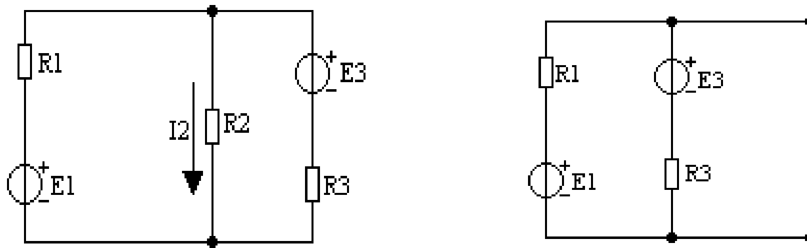
$$IR_2 = E_T \Rightarrow E_T = -\frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$E_T = -\frac{2 \cdot 2}{1 + 2} = -1{,}33[V]$$

$$I_{R3} = \frac{E_T}{R_T + R_3} = \frac{-1{,}33}{0{,}67 + 3} = -0{,}363[A]$$

Primjer 1.4.2.

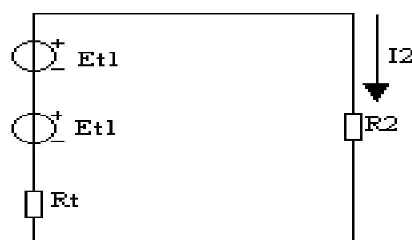
Tevenenovom teoremom odrediti struju I_2 u kolu
$E_1 = 5V, E_3 = 10V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 4\Omega$



$$R_T = \frac{R_1 \bullet R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \bullet 4}{2 + 4} = \frac{8}{6} = 1{,}33\Omega$$

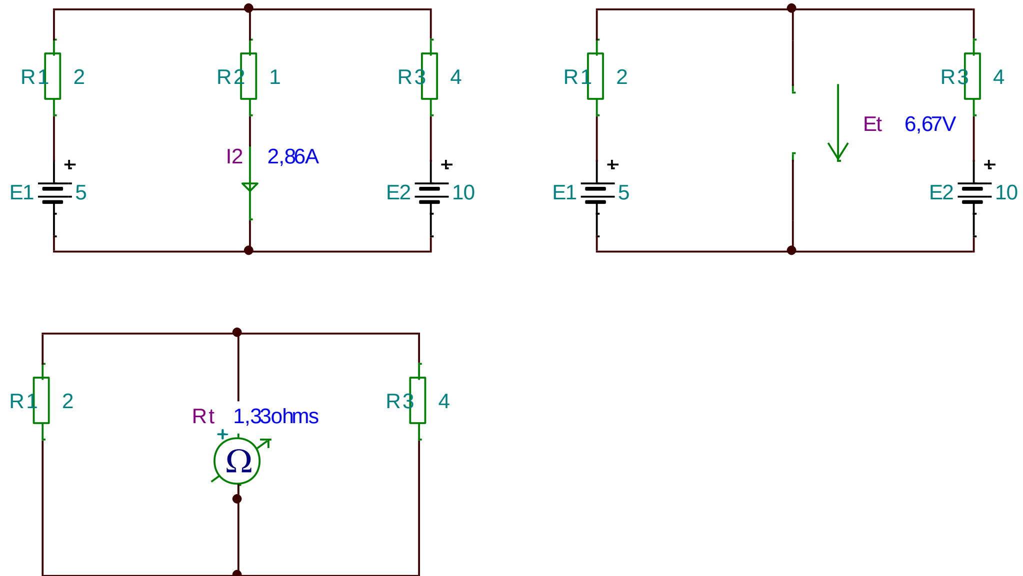
$$E_{T1} = \frac{E_3 * R_1}{R_1 + R_3} = \frac{10 * 2}{2 + 4} = 20/6 = 3{,}33\Omega$$

$$E_{T2} = \frac{E_1 * R_3}{R_1 + R_3} = \frac{5 * 4}{2 + 4} = 20/6 = 3{,}33\Omega$$

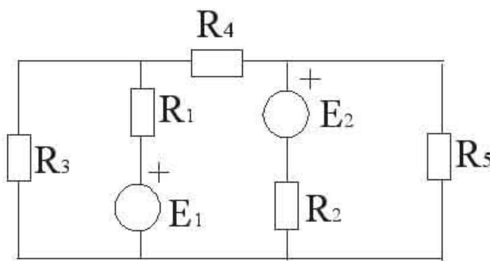


$$I_2 R_2 + I_2 R_T - E_{T1} - E_{T2} = 0$$
$$I_2 (R_2 + R_T) = E_{T1} + E_{T2}$$
$$I_2 = \frac{E_{T1} + E_{T2}}{R_2 + R_T} = \frac{3{,}33 + 3{,}33}{1 + 1{,}33} = \frac{6{,}66}{2{,}33}$$
$$I_2 = 2{,}85[A]$$

Nakon simulacije na računaru dobivamo:



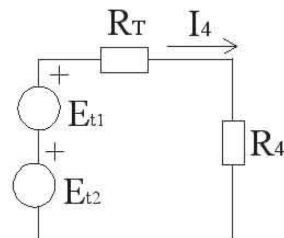
Primjer 1.4.3.



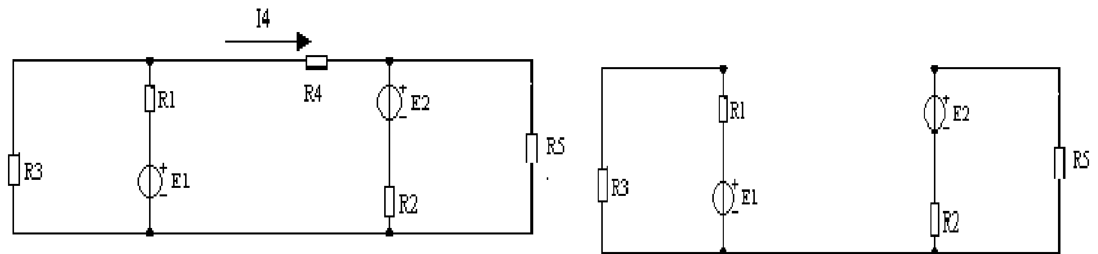
$$E_1 = 2[V]$$
$$E_2 = 4[V]$$
$$R_1 = R_2 = 1[\Omega]$$
$$R_3 = R_4 = 2[\Omega]$$
$$R_5 = 4[\Omega]$$

$$R_T = R_1 \| R_3 + R_2 \| R_5$$
$$R_T = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{1 \cdot 4}{1+4} = 1{,}5[\Omega]$$

$$E_{T1} = \frac{E_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}$$
$$E_{T2} = -\frac{E_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = \frac{-4 \cdot 4}{1+4} = -\frac{16}{5}$$
$$I_4 = \frac{E_{T1} + E_{T2}}{R_T + R_N} = -0{,}54[A]$$



Primjer 1.4.4.
Tevenenovom teoremom odrediti struju I_4 u kolu
$E_1 = 2V, E_2 = 4V, R_1 = R_2 = 1\Omega, R_3 = R_4 = 2\Omega, R_5 = 4\Omega$



$$R_T = \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 * R_5}{R_2 + R_5} = \frac{1*2}{1+2} + \frac{1*4}{1+4}$$

$$R_T = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 0,66 + 0,8 = 1,46\Omega$$

$$E_{T1} = \frac{E_1 * R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2*2}{1+2} = 4/3$$

$$E_{T1} = 1,33[V]$$

$$E_{T2} = \frac{E_2 * R_5}{R_2 + R_5} = \frac{4*4}{1+4} = 16/5$$

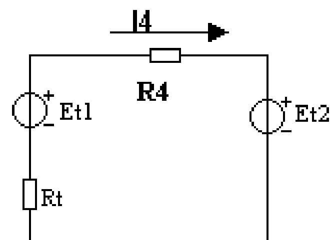
$$E_{T2} = 3,2[V]$$

$$I_4 R_4 + E_{T2} + I_4 R_T - E_{T1} = 0$$

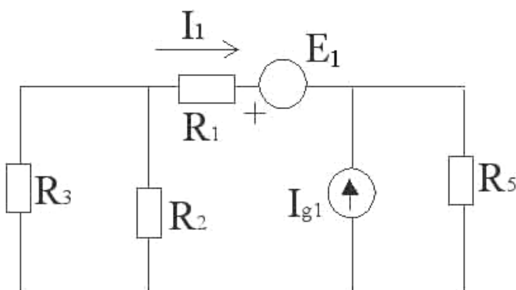
$$I_4 (R_4 + R_T) = E_{T1} - E_{T2}$$

$$I_4 = \frac{E_{T1} - E_{T2}}{R_4 + R_T} = \frac{1,33 - 3,2}{2 + 1,46} = \frac{-1,78}{3,46}$$

$$I_4 = -0,54[A]$$



Primjer 1.4.5.

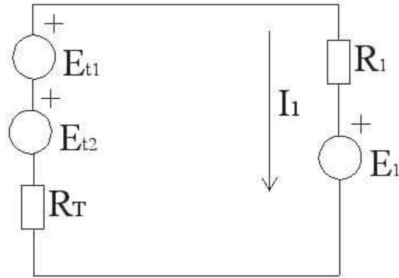


$E_1 = 2[V]$
$E_2 = 3[V]$
$I_{G1} = 3[A]$
$R_1 = R_2 = 2[\Omega]$
$R_3 = R_4 = 1[\Omega]$

$$R_T = R_2 \| R_3 + R_4 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = \frac{2 \cdot 1}{2+1} + 1 = 1,67[\Omega]$$

$$E_{T1} = \frac{E_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 1}{2 + 1} = 1[V]$$

$$E_{T2} = -I_{G1} \cdot R_4 = -3 \cdot 1 = -3[V]$$

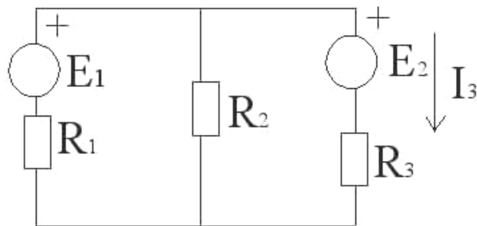


$$I_1(R_1 + R_T) + E_1 - E_{T1} - E_{T2} = 0$$

$$I_1 = \frac{E_{T1} + E_{T2} - E_1}{R_1 + R_T} = \frac{1 - 3 - 2}{3{,}67} = -1{,}09$$

$$I_1 = -1{,}09[A]$$

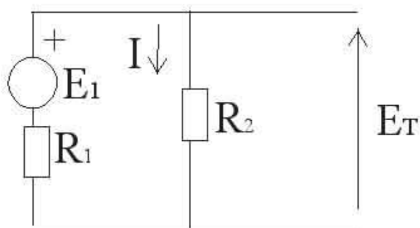
Primjer 1.4.6.



$E_1 = 5[V]$
$E_2 = 2[V]$
$R_1 = 2[\Omega]$
$R_2 = 3[\Omega]$
$R_3 = 5[\Omega]$

$I_3 = ?$

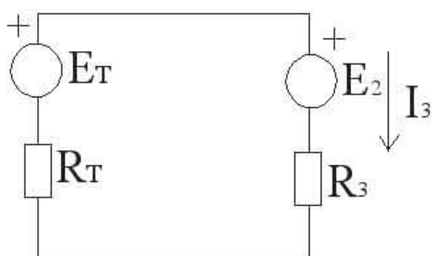
$$R_T = R_1 \| R_2 = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1{,}2[\Omega]$$



$$IR_2 = E_T$$

$$I(R_1 + R_2) = E_1$$

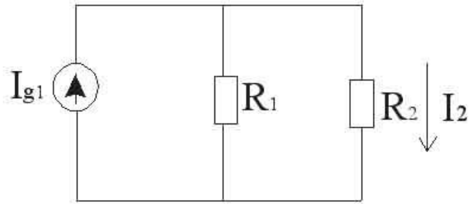
$$E_T = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 3}{2 + 3} = 3[V]$$



$$I_3 = (R_3 + R_T) - E_T + E_2 = 0$$

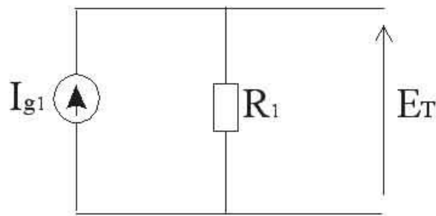
$$I_3 = \frac{E_T - E_2}{R_3 + R_T} = \frac{3 - 2}{5 + 1{,}2} = 0{,}161[A]$$

Primjer 1.4.7.

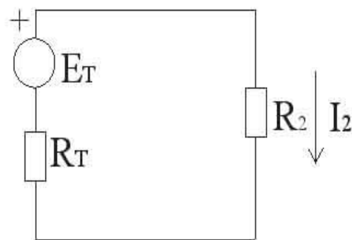


$$I_{G1} = 3[A]$$
$$R_1 = 2[\Omega]$$
$$R_2 = 3[\Omega]$$

$$R_T = R_1 = 2[\Omega]$$

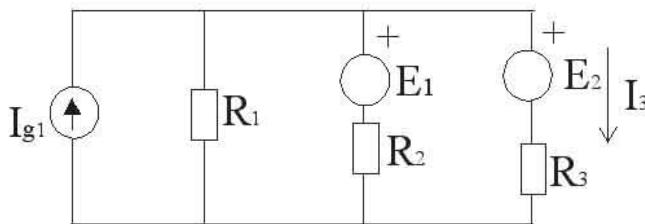


$$E_T = I_{G1} \cdot R_1 = 3 \cdot 2 = 6[V]$$



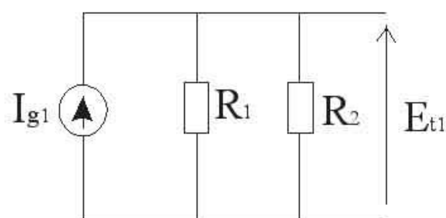
$$I_2 = \frac{E_T}{R_T + R_2} = \frac{6}{2+3} = 1{,}2[A]$$

Primjer 1.4.8.

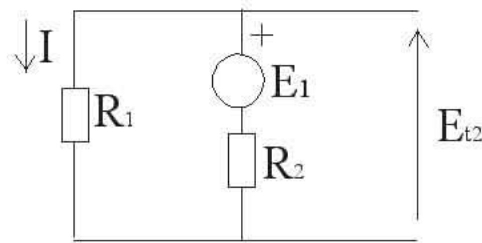


$$I_{G1} = 1[A]$$
$$E_1 = 2[V]$$
$$E_2 = 3[V]$$
$$R_1 = 1[\Omega]$$
$$R_2 = 3[\Omega]$$
$$R_3 = 2[\Omega]$$

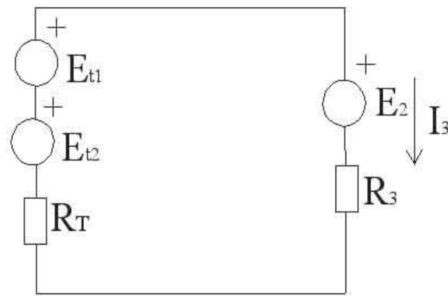
$$R_T = R_1 \| R_2 = \frac{1 \cdot 3}{1+3} = 0{,}75[\Omega]$$



$$E_{T1} = I_{G1} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75[V]$$

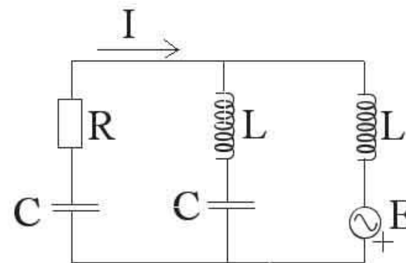


$$I(R_1 + R_2) = E_1$$
$$IR_1 = E_{T2}$$
$$E_{T2} = \frac{E_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 1}{1+3} = 0{,}5[V]$$



$$I_3(R_3 + R_T) - E_T - E_{T2} + E_2 = 0$$
$$I_3 = \frac{E_{T1} + E_{T2} - E_2}{R_3 + R_T} = \frac{0{,}75 + 0{,}5 - 3}{0{,}75 + 2} = \frac{-1{,}75}{2{,}75}$$
$$I_3 = -0{,}636[A]$$

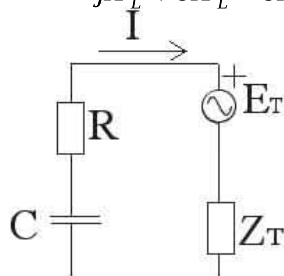
Primjer 1.4.9.



$R = 2[\Omega]$
$X_L = 4[\Omega]$
$X_C = 2[\Omega]$
$E = 4[V]$

$$Z_T = \frac{jX_L(jX_L - X_C)}{jX_L + jX_L - jX_C} = \frac{j4 \cdot (j4 - j2)}{j4 + j4 - j2} = \frac{-8}{6j} = \frac{4}{3}j = j1{,}33$$

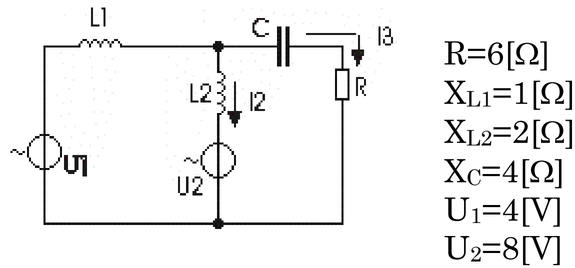
$$E_T = -\frac{E(jX_L - jX_C)}{jX_L + JX_L - JX_C} = \frac{-4(j4 - j2)}{j4 + j4 - j2} = -\frac{4}{3}[V]$$



$$I(R - jX_C + Z_T) = -E_T$$
$$I = \frac{-E_T}{R - jX_C + Z_T} = \frac{\frac{4}{3}}{2 - j2 + \frac{4}{3}j} = \frac{1{,}33}{2 - j0{,}66} =$$
$$I = 0{,}6 + j0{,}2\,[A]$$

Primjer 1.4.10.

Za izmjenično kolo na slici Tevenenovom teoremom odrediti struju I_3 ako je dato



$R=6[\Omega]$
$X_{L1}=1[\Omega]$
$X_{L2}=2[\Omega]$
$X_C=4[\Omega]$
$U_1=4[V]$
$U_2=8[V]$

$$I_1=\frac{U_1}{jX_{L1}}$$

$$E_{T1}=I_1\cdot\frac{jX_1\cdot jX_{L2}}{jX_{L1}+jX_{L2}}=4\cdot\frac{2j}{j+2j}=\frac{8j}{3j}=2{,}66[V]$$

$$I_2=\frac{U_2}{jX_{L2}}$$

$$E_{T2}=I_2\cdot\frac{jX_L\cdot jX_{L2}}{jX_{L1}+jX_{L2}}=8\cdot\frac{j}{j+2j}=2{,}66[V]$$

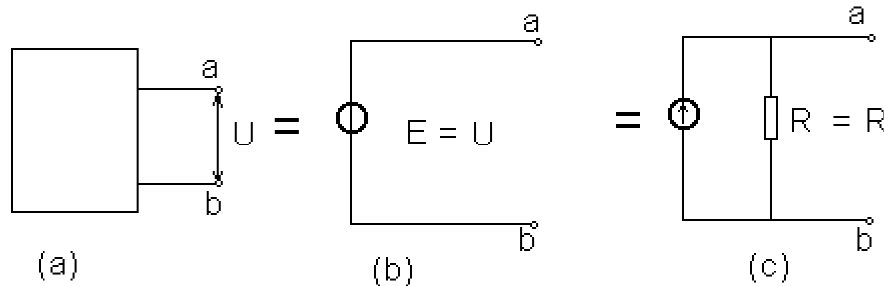
$$E_T=E_{T1}+E_{T2}=2{,}66+2{,}66=5{,}33[V]$$

$$Z_T=\frac{jX_{L1}\cdot jX_{L2}}{jX_{L1}+jX_{L2}}=\frac{2j}{3}[\Omega]$$

$$I_3=\frac{E_T}{Z_T+R-jX_C}=\frac{36+j20}{53}[A]$$

1.5. NORTONOVA TEOREMA

U predhodnom poglavlju pokazano je da se proizvoljna linearna mreža u odnosu na svoje krajeve a i b može zamijeniti ekvivalentnom tevenenovim naponskim generatorom , čija je ems $E_T = U_{ab\infty}$, a unutrašnja otpornost R_T =Rekv.



Pošto se svaki naponski generator, sem idealnog meže zamijeniti ekvivalentnim strujnim generatorom, to se i posmatrana mreža na slici može zamijeniti ekvivalentnim strujnim generatorom , koji se naziva nortonov generator (slika .c). Na osnovu formula ekvivalencije naponskog i strujnog generatora, i struja Nortonovog strujnog generatora je :

$$I_N = \frac{E_T}{R_T}$$

a paralelna otpornost $R_N = R_T$, odnosno provodnost $G_N = G_T$

Na osnovu prethodnog proizilazi da je struja Nortonovog generatora, I_N , ustvari struja kratkog spoja tevenenovog generatora , odnosno mreže koju ovaj generator predstavlja . Prema tome,

$$I_N = I_{KS}$$

gdje je I_{KS} struja kroz kratki spoj između tačaka a i b mreže na slici a. Paralelna otpornost Nortonovog generatora je jednaka ekvivalentnoj otpornosti mreže na slici a. gledane sa strane krajeva a i b , kada su sve ems i struje strujnih generatora u mreži jednake nuli:

$$R_N = R_{ekv} \ \text{odnosno} \ G_N = G_{ekv}$$

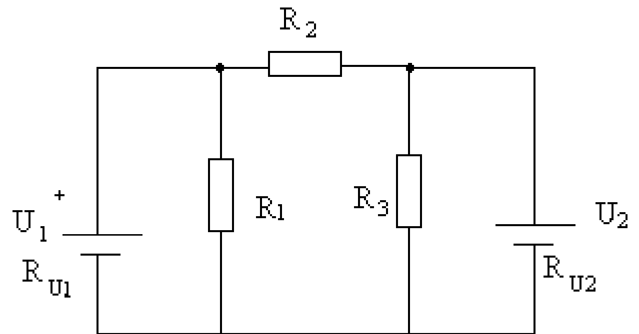
Na osnovu svega rečenog Nortonova teorema se može iskazati na sljedeći način :

Električna mreža se u odnosu na bilo koja dva svoja priključka ponaša kao (nortonov) sturujni generator , čija je struja I_N jednaka struji kroz kratak spoj između posmatranih priključaka, a paralelna otpornost mu je jednaka

ekvivalentnoj otpornosti mreže, gledane sa strane ovih priključaka , kada su sve ems naponskih generatora i struja strujnih generatora poništene.

Primjer 1.5.1.

Za kolo na slici odrediti struju I_2 metodom Nortonovog generatora pri datim vrijednostima:
$R_1=R_3=20[\Omega]$
$R_2=16[\Omega]$
$R_{u1}=R_{u2}=5[\Omega]$
$U_1=36[V]$
$U_2=48[V]$



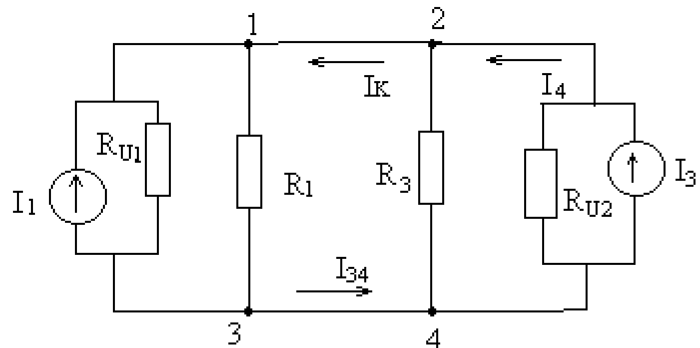
$$I_1=\frac{U_1}{R_{U1}}=7{,}2[A]$$

$$I_3=\frac{U_2}{R_{U2}}=9{,}6[A]$$

$$I_N=I_K=\frac{I_3-I_1}{2}=1{,}2[A]$$

$$R_N=\frac{R_{U1}\cdot R_1}{R_{U1}+R_1}+\frac{R_{U2}\cdot R_3}{R_{U2}+R_3}=8[\Omega]$$

$$I_2=I_N\cdot\frac{R_N}{R_N+R_2}=0{,}4[A]$$



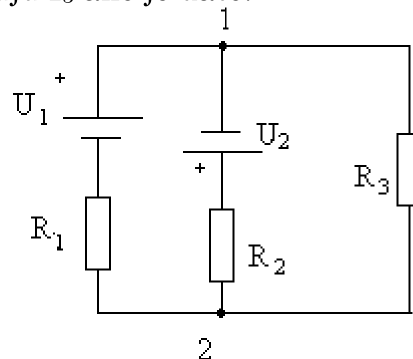
Primjer 1.5.2.

Metodom Nortonove teoreme odrediti struju I_3 ako je dato:
$R_1=R_2=4[\Omega]$
$R_3=6[\Omega]$
$U_1=8[V]$
$U_2=12[V]$
Rješenje :

$$I_1=\frac{U_1}{R_1}=2A$$

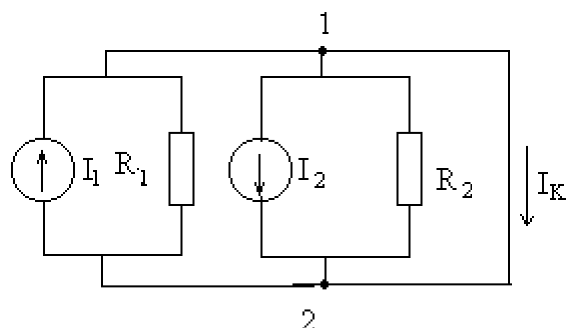
$$I_2=\frac{U_2}{R_2}=3A$$

$I_N=I_K=I_1-I_2= - 1A$



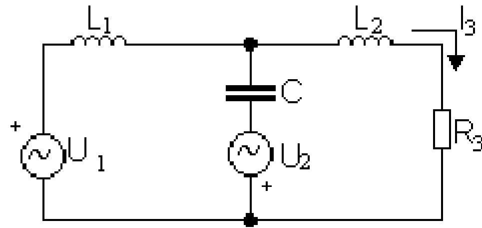
$$R_N=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=2\Omega$$

$$I_3=I_N\cdot\frac{R_N}{R_N+R_3}=-0{,}25A$$



Primjer 1.5.3.

Za kolo na slici Nortonovom teoremom odrediti struju I_3 uz dato:
$jX_{L1}=jX_{L2}=2[\Omega]$
$R=2[\Omega]$
$jX_c=1[\Omega]$
$U_1=4[V]$
$U_2=6[V]$



Rješenje :

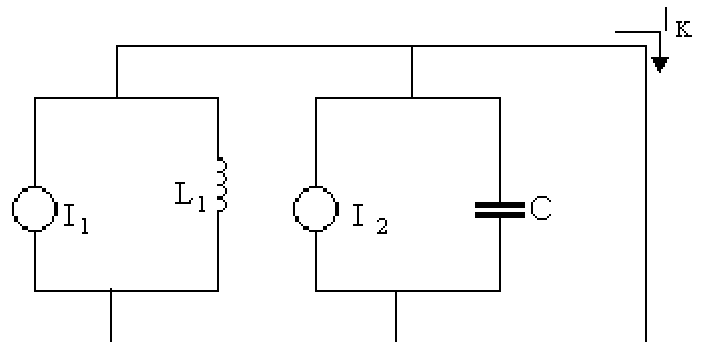
$$I_1 = \frac{U_1}{jX_{L1}} = -2j$$

$$I_2 = \frac{U_2}{-jX_C} = 6j$$

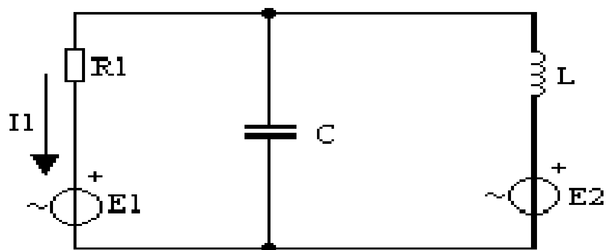
$$I_K = I_1 - I_2 = -8j$$

$$Z_N = \frac{jX_L \cdot jX_C}{jX_L + jX_C} = -2j$$

$$I_3 = I_K \cdot \frac{Z_N}{Z_N + R + jX_L} = -8[A]$$



Primjer 1.5.4.
Nortonovom teoremom odrediti struju I_1 u kolu
$E_1 = 2V, E_2 = 3V, R = 2\Omega, X_C = 4\Omega. X_L = 3\Omega$





$$Z_N = \frac{jX_L * (-jX_C)}{jX_L + (-jX_C)} = \frac{j3*(-j4)}{j3 - j4} = \frac{12}{-j} * \frac{j}{j} = j12\Omega$$

$$I_N = \frac{E_2}{jX_L} = \frac{3}{j3} * \frac{j}{j} = \frac{j3}{-3} = -j[A]$$

$$E_N = Z_N * I_N = j12*(-j) = 12[V]$$

$$I_1 R_1 + E_1 + I_1 Z_N - E_N = 0$$

$$I_1(R_1 + Z_N) = E_N - E_1$$

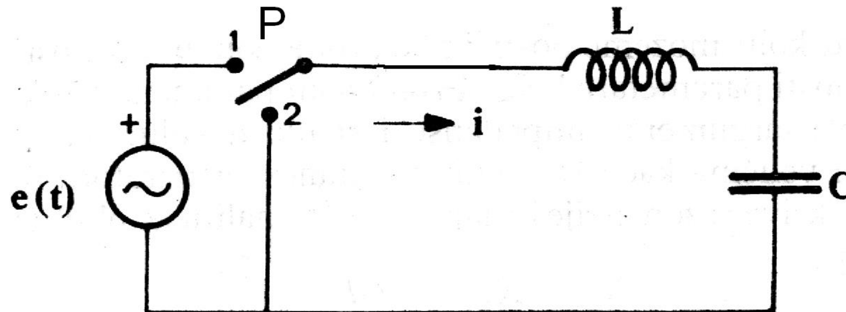
$$I_1 = \frac{E_N - E_1}{R_1 + Z_N} = \frac{12-2}{2+j12} = \frac{10}{2+j12} * \frac{2-j12}{2-j12} = \frac{20-j120}{4+144} = \frac{20-j120}{140}$$

$$I_1 = 0{,}135 - j0{,}81[A]$$

2.OSCILATORNA KOLA

2.1. PROSTO REZONANTNO KOLO

Pod prostim rezonantnim kolom podrazumijevamo rednu vezu kalema induktivnosti L, zanemarivih gubitaka, i kondenzatora C, zanemarive aktivne provodnosti, sl.1.



Slika 1

Ako je ovakvo kolo bilo priključeno na prostoperiodični izvor napona e(t), prekidač u položaju 1, u kolu će postojati elektromagnetna i elektrostatička energija, čiji se iznosi takođe mijenjaju po prostoperiodičnnim zakonima.

Prebacimo prekidač P iz položaja 1 u položaj 2, u trenutku kada je struja u kolu jednaka nuli. Elektromagnetna energija kola je tada takođe jednaka nuli, a elektrostatička energija je maksimalna i iznosi:

$$W_e = \frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{Q_m^2}{2C}.$$

Kako i poslije prebacivanja prekidača u položaj 2 u kolu postoji izvijesna energija (u ovom slučaju elektrostatička), u kolu će teći neka struja, mada u kolu ne postoji aktivan izvor energije. Struja kroz kolo i naponi na krajevima elemenata biće u ovom slučaju prostoperiodične funkcije vremena dok za kolo prepušteno samo sebi kažemo da se nalazi u sopstvenom režimu. Za određenje napona i struje u kolu za svaki trenutak, koristimo jednačinu ravnoteže napona, koja određuje režim u kolu poslije prebacivanja prekidača u položaj 2:

$$u_L + u_C = 0$$

Na osnovu ovih jednačina imamo da je:

$$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \psi_0),$$

Gdje je: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i $I_m = -\omega_0 Q_m,$ pa je izraz za struju dat u obliku:

$$i(t) = -\omega_0 Q_m \sin \omega_0 t.$$

Tako da su napon na krajevima kondenzatora i opterećenje kondenzatora dati izrazima 1 i 2 :

$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t, \qquad (1)$$
$$q(t) = Q_m \cos\omega_0 t, \qquad (2)$$

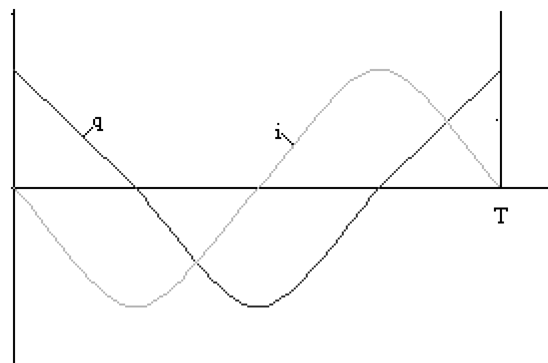
a napon na krajevima kalema:

$$u_L(t) = -\frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t.$$

Sve veličine u kolu su prostoperiodične, a kružna učestanost ω_0 se naziva sopstvena kružna učestanost kola.

Data je izrazom: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,

a perioda oscilacija (Tompsonov obrazac): $T = 2\pi\sqrt{LC}.$



Slika2

U prostom rezonantnom kolu u sopstvenom režimu nema gubitaka energije, jer smo ih zanemarili, a u toku jedne periode dolazi do naizmjenične razmjene energije između kondenzatora i kalema.

Elektrostatička i elektromagnetna energija date su izrazom:

$$w_e = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{q^2}{2C}, \qquad w_m = \frac{1}{2}Li^2$$

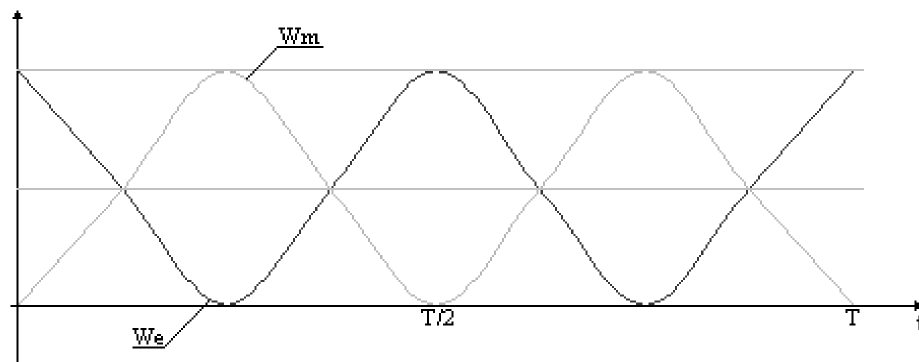
Sa dijagrama se vidi da u prvoj četvrtini periode q opada, a i raste po apsolutnoj vrijednosti, tj. elektrostatička energija opada, a elektromagnetna raste :

$$0 \le t \le \frac{T}{4}$$

Zbir ove dvije energije mora da je u svakom trenutku konstantan, jer prosto rezonantno kolo predstavlja zatvoreni energetski sistem.

Povećanje elektromagnetne energije u prvoj četvrtini periode vrši se na račun smanjenja elektrostatičke energije. Kondenzator se u ovom slučaju ponaša kao generator. U drugoj četvrtini periode struja se smanjuje po apsolutnoj vrijednosti, a količina elektriciteta povećava, odnosno elektromagnetna energija se smanjuje, a elektrostatička energija se povećava:

$$\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}$$



Slika 3

U ovom slučaju kalem se ponaša kao generator energije. U drugoj polovini periode, promjena energije se vrši na isti način kao u toku prve polovine periode. Perioda promjene energije je dva puta manja od sopstvene periode kola.

Dijagrami energije dati su na slici 2.i 3.

Tada su naponi na krajevima kalema i kondenzatora:

$$u_L = -\frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t = +\omega_0 L I_m \cos\omega_0 t, \qquad u_C = \frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t = -\frac{I_m}{\omega_0 C}\cos\omega_0 t$$

Uvodeći veličinu :

$$Z_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

Pa dobijemo da je:

$$u_L = Z_C I_m \cos\omega_0 t, \qquad u_c = -Z_C I_m \cos\omega_0 t,$$

Z_C se naziva karakteristična impedansa kola.

2.2. REZONANCIJA U PROSTOM REZONANTNOM KOLU

Ako se prosto rezonantno kolo priključi na prostoperiodični naponski generator, struja kroz kolo će biti takođe prostoperiodična:

$$e(t) = \sqrt{2}E\sin(\omega t + \theta),$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi),$$

gdje je :

$$I = \frac{E}{Z} \qquad Z = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| \qquad \psi = \theta - \varphi$$

$$\varphi = 90^\circ \text{ pri } \quad \omega L > \frac{1}{\omega C} \qquad \varphi = -90^\circ \text{ pri } \quad \omega L < \frac{1}{\omega C}.$$

Vidimo da modul impedanse kola i njen argument zavisi od učestanosti spoljašnjeg generatora, te će i vrijednost struje i njen argument takođe zavisiti od učestanosti spoljašnjeg generatora.

Impedansa kola biće minimalna pri uslovu :

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = 0 \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Tada će imati vrijednost nula. Struja u kolu će tada imati beskonačnu vrijednost, argument impedanse skače sa vrijednosti -90° do 90°.

U ovom slučaju kažemo da je u kolu nastupila idealna rezonancija, a na osnovu naprijed izvedenog ,uslov za to je da je križna učestanost spoljašnjeg generatora jednaka sopstvenoj kružnoj učestanosti kola.

U ovom slučaju generator se ponaša kao da su mu krajevi u kratkom spoju i ne ulaže nikakvu energiju za održavanje struje u kolu, jer je napon na njegovim krajevima jednak nuli. Kalem i kondenzator se ponašaju kao prosto rezonantno kolo u sopstvenom režimu, u kome se vrši samo izmjena elektrostatičke i elektromagnetne energije.

Uslov za pojavu rezonancije u kolu možemo postići bilo promjenom učestanosti generatora, bilo promjenom vrijednosti parametara kola.

Promjenom parametara kola dolazi do promjene impedanse kola, argumenta impedanse i struje u kolu.

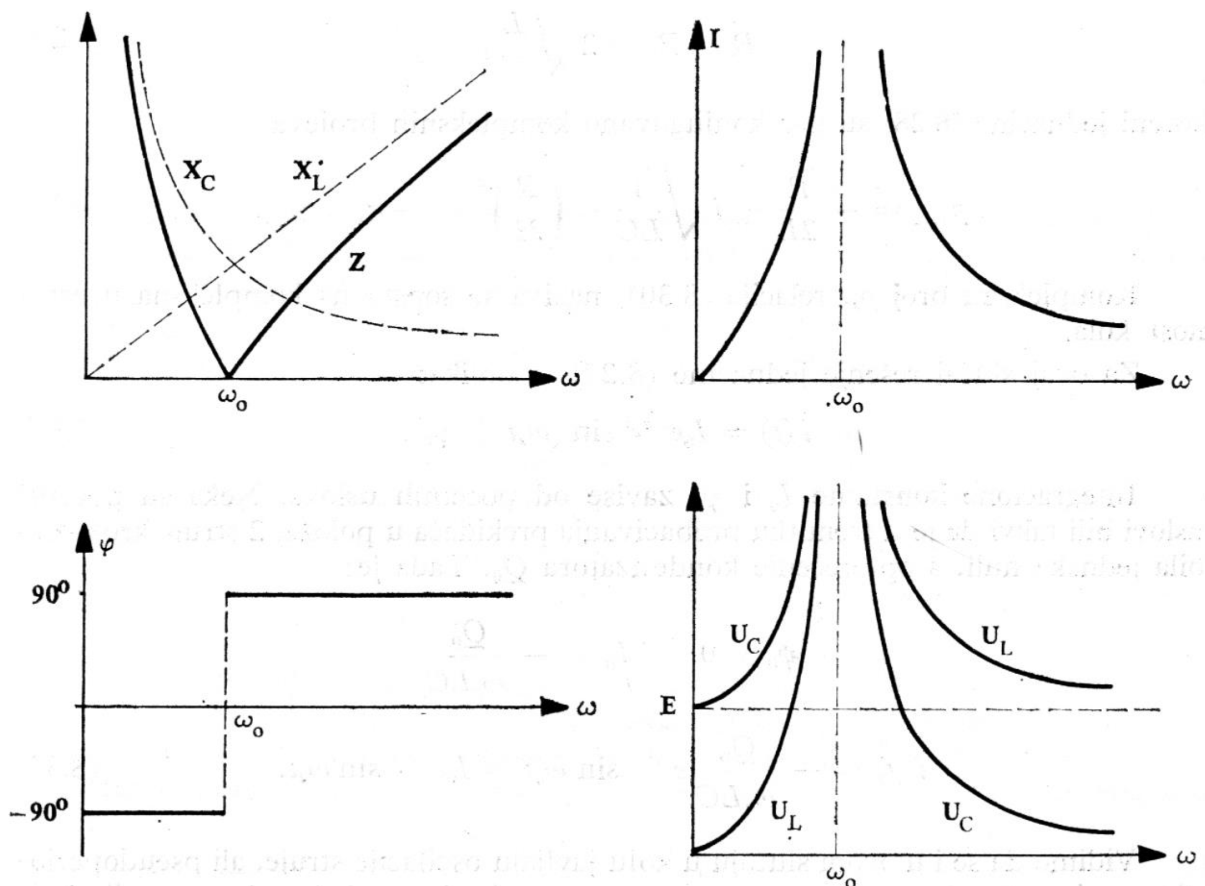
Krive linije koje pokazuju promjene ovih veličina kada se mijenja učestanost generatora ili neki od parametara kola nazivaju se krive rezonancije i imaju analitičke oblike :

$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad Z = \left| X_L - X_C \right| = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|$$

$$\varphi = 90° \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C} \qquad I = \frac{E}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}$$

$$\varphi = -90° \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$$

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega^2 LCE}{\omega^2 LC - 1} \qquad U_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{E}{\omega^2 LC - 1}.$$



Slika 4

Primjer 2.1.

Parametri prostog rezonantnog kola su: L = 1mH, C = 10pF, priključenog na prostoperiodični napon oblika $e(t) = \sqrt{2}E \sin \omega t$ E = 2V, f = 1,5MHz. Odrediti napon na pojedinim elementima i struju u kolu i odrediti sopstvenu učestanost.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = 9{,}42 \cdot 10^6$$

$$X_L = \omega \cdot L = 9{,}42 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 9{,}42 \cdot 10^3\ \Omega$$

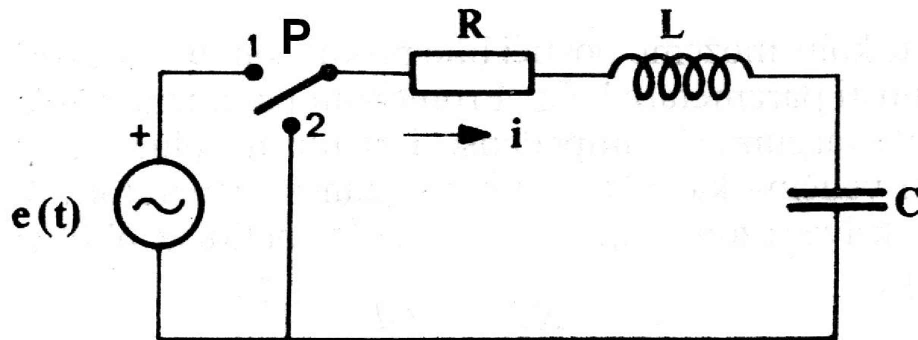
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{9{,}42 \cdot 10^6 \cdot 10^{-11}} = \frac{1}{9{,}42 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^5}{9{,}42} = 10{,}6\ k\Omega$$

2.3. REZONANTNO KOLO SA NESAVRŠENIM KALEMOM

Ako omska otpornost kalema nije zanemarljiva, pa izgled takvog kola je predstavljen na slici 5

Ako se prekidač iz položaja 1 prebaci u položaj 2 i kolo prepusti samo sebi, režim u kolu će biti određen jednačinom naponske ravnoteže:

$$u_R + u_L + u_C = 0$$



Slika 5

Struja u kolu u sopstevnom režimu će biti data izrazom $i(t) = I_0 e^{-\sigma_S t} \sin(\omega_S t)$.

Gdje $p_S = -\sigma_S \pm j\omega_S$

$p_S -$ se naziva sopstvena kompleksna učestanost kola.

$$I_0 = -\frac{Q_0}{\omega_S LC}$$

$$i(t) = -\frac{Q_0}{\omega_S LC} e^{-\sigma_S t} \sin \omega_S t = I_0 e^{-\sigma_S t} \sin \omega_S t.$$

Vidimo da se i u ovom slučaju javljaju oscilacije stuje, ali pseudoperiodičnog tipa. Struja u kolu se postepno smanjuje, jer se jedan dio energije kola stalno gubi zbog postojanja otpornosti R.

Struja u kolu će pasti na nulu, kada se sva el. energija pretvori u toplotnu, a oscilacije u kolu će nestati.

Ovakav režim možemo postići ako kolo priključimo na generator koji daje pseudoperiodičan napon:

$$e(t) = E_0 e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$$

Struja u kolu će imati beskonačno veliku vrijednost ako kompleksnu učestanost generatora podesimo tako da je jednaka sopstvenoj kompleksnoj učestanosti kola :

$$p = p_S \qquad \omega = \omega_S = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$$

Za ovaj slučaj kažemo da je nastupila *idealna rezonansa.* Ako promijenimo učestanost generatora mijenjat će se impedansa kola i njen argument, tj. i struja kroz kolo, ali će ona uvijek imati konačnu vrijednost:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}), \qquad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi = arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

Ako se kružna učestanost generatora podesi tako da je jednaka sopstvenoj učestanosti pseudoperiodičnih oscilacija u kolu, kažemo da je u kolu nastupila prava rezonancija:

$$\omega = \omega_S = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}.$$

Ako su parametri kola i učestanosti generatora izabrani tako da je reaktivna otpornost kola jednaka nuli, kažemo da je nastupila fazna rezonancija.

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Struja ima maksimalnu vrijednost (što nije uvijek slučaj pri faznoj rezonanciji), a naponi na kalemu i kondenzatoru su u svakom trenutku isti po efektivnoj vrijednosti, ali suprotnog su znaka.

Posmatrano kolo se ponaša kao da nema kalema i kondenzatora, tj. kao da je ovaj dio kola u kratkom spoju, a generator ne ulaže rad za održavanje elektrostatičke i elektromagnetne energije. U kolu se vrši izmjena ove dvije energije, kao i u slučaju prostog rezonantnog kola u sopstvenom režimu.

Krive rezonancije podrazumijevaju promjenu efektivne vrijednosti impedanse, njenog ugla, efektivne vrijednosti struje i napona na pojedinim elementima kola, mogu se nacrtati na osnovu relacija:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad \varphi = arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I = \frac{\omega CE}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \qquad U_R = RI = \frac{\omega CRE}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$U_L = \omega LI = \frac{\omega^2 LCE}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \qquad U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{E}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}.$$

Na slici 6 prikazane su krive rezonancije dobijene promjenom kružne učestanosti generatora, pri čemu su L i C konstantni, a R parametar familije krivih.

Učestanosti pri kojima su napon na kondenzatoru i na kalemu maksimalni date su izrazima:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - 0{,}5(\frac{R}{L})^2} = \omega_0\sqrt{1 - 2(\frac{R}{R_C})^2}$$

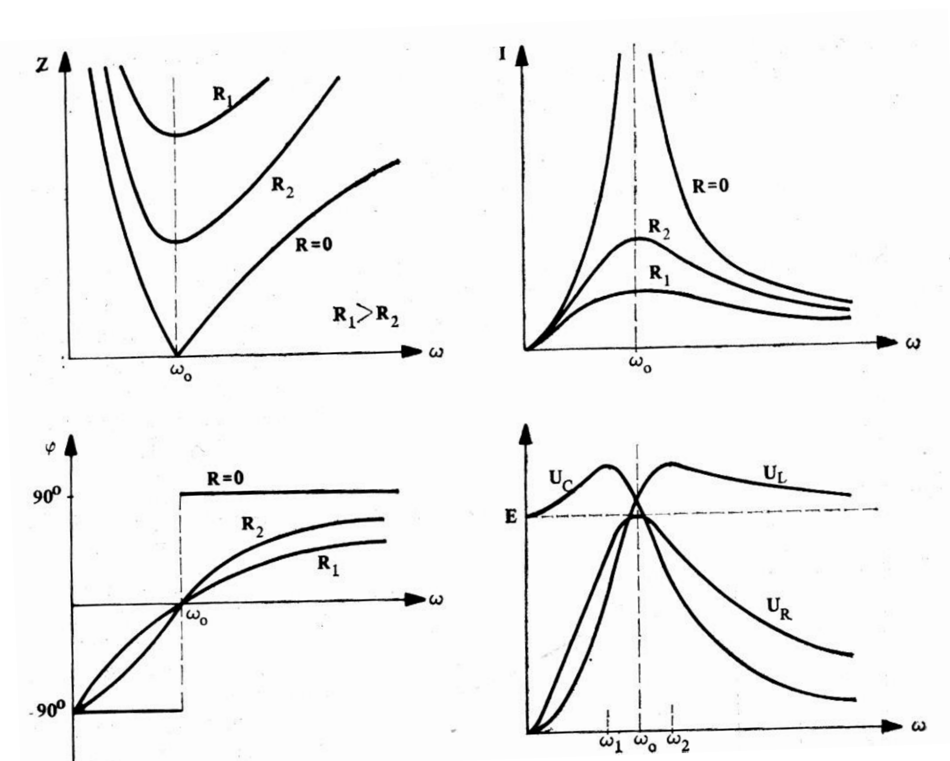
$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC - 0{,}5(RC)^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2(\frac{R}{R_C})^2}}.$$

Maksimalna efektivna vrijednost napona kondenzatora je:

$$U_{C\max} = \frac{E}{R\sqrt{\frac{C}{L} - (\frac{RC}{2L})^2}} = \frac{R_C E}{2R\sqrt{1 - (\frac{R}{R_C})^2}}$$

Ako je otpornost kola mala, vrijednost napona na kondenzatoru može biti i više puta veća od napona generatora, čak toliko velika da dođe do proboja dijalektrika kondenzatora. Napon na kondenzatoru neće premašiti napon generatora ako izaberemo da je:

$$R \geq \frac{R_C}{\sqrt{2}}.$$



Slika 6.

Primjer 2.2.

Odrediti napone na R, L, C elementima za slučaj fazne rezonance ako je dato $E = 2V, C = 50nF, R = 50\Omega, L = 2mH$. Sopstvenu i kompleksnu učestanost kola.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^{-3}\cdot 50\cdot 10^{-9}}} = 100000\frac{rad}{s}$$

$E = 2V$

$R = 50\Omega$

$L = 2mH$

$C = 50nF$

$\omega_0, U_R, U_L, U_C, p_s = ?$

$$\sigma_S = \frac{R}{2L} = \frac{50}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 12{,}500\frac{rad}{s}$$

$$\omega_S = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{LC}} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta_S^2}$$

$$\omega_S = \sqrt{\left(10^5\right)^2 - \left(12{,}5\cdot 10^3\right)^2} = \sqrt{10^{10} - 156{,}25\cdot 10^6}$$

$$\omega_S = 99215\frac{rad}{s}$$

$$p_S = -\sigma_S \pm j\omega_S = \left(-12{,}5 \pm j99{,}215\right)\cdot 10^3\frac{rad}{s}$$

$$U_{RO} = E = 2V$$

$$\left|U_{LO}\right| = \omega_0 L\cdot I = \omega_0 L\cdot\frac{E}{R} = \frac{10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 2}{50} = 8V$$

$$\left|U_{CO}\right| = \frac{1}{\omega_0 C}\cdot I = \frac{E}{\omega_0 CR} = \frac{2}{10^5\cdot 50\cdot 10^{-9}\cdot 50} = 8V$$

$$\left|U_{LO}\right| = \left|U_{CO}\right| = 8V$$

Primjer 2. 3.

Za rezonantno kolo sa nesavršenim kalemom poznato je $R = 1k\Omega, C = 5nF, f = 100kHz$.

Odrediti induktivnost L tako da napon na kalemu bude maksimalan. Odrediti i sopstvenu učestanost.

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{R}{R_C}\right)^2}} \qquad R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2}{2LC - R^2C^2} \Rightarrow L = \frac{2 + \omega_2^2 R^2 C^2}{2C\omega_2^2}$$

$$L = \frac{2 + 4\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{10}} = \frac{11{,}8696}{3{,}948 \cdot 10^3} = 3mH$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{10}}} = 41{,}09kHz$$

Primjer 2.4.

Za rezonantno kolo sa nesavršenim kalemom poznato je $R = 1k\Omega, L = 5mH, f = 100kHz$. Odrediti kapacitete C da napon na kondenzatoru bude maksimalan za datu sopstvenu frekvenciju.

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{R}{R_C}\right)^2} \qquad R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \omega_1 = \omega = 2\pi f$$

$$C = \frac{2L}{2(2\pi)^2 \cdot L^2 f^2 + R^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{10} + 10^6} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20739 \cdot 10^4}$$

$$C = 482\,pF$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}82 \cdot 10^{-12}}}$$

$$f_0 = 102{,}5kHz$$

2.4.Q-FAKTOR KALEMA

Pojave u rezonantnom kolu sa nesavršenim kalemom znatno zavise od veličine aktivne otpornosti kalema. Ovom otpornošću ne treba smatrati samo čistu omsku otpornost kalema, od čije veličine zavisi količina oslobođene toplote u kalemu, već i otpornosti koje potiču od drugih pojava, kao što su skin-efekat, međusobni uticaj zavojaka kalema. i itd.

Ekvivalentni otpor za ove pojave zavisi od učestanosti, te se može govoriti o ekvivalentnom otporu kalema samo za određenu učestanost. Zbog toga se kao karakteristika kalema uvodi Q-faktor kalema, koji predstavlja količnik njegove reaktivne i aktivne otpornosti i koji je u velikom opsegu promjene učestanosti konstantan:

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} = 2\pi \frac{(w_m)_{max}}{w_R},$$

gdje je

- $(w_m)_{max}$ - maksimalna elektromagnetna energija
- w_R -energija gubitaka u kalemu u toku jedne periode.

- Q- faktor za slučaj fazne rezonancije je:

$$Q_{LO} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

Često je od interesa odrediti opseg učestanosti u kome efektivna vrijednost struje neće pasti ispod neke unaprijed definisane granice.

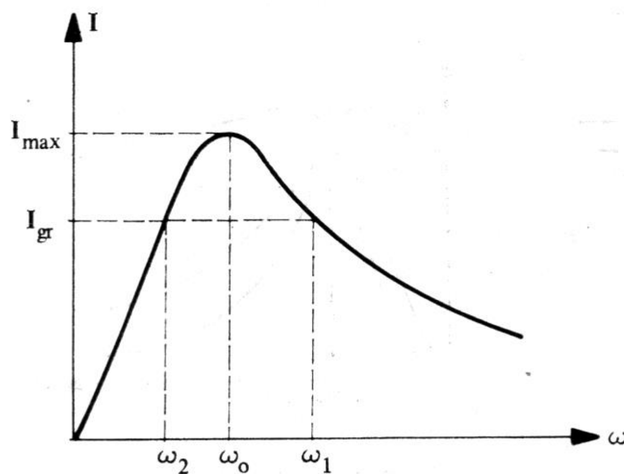
Obično je ta granica $\sqrt{2}$ puta manja vrijednost maksimalne efektivne vrijednosti struje, sl 7.

$$I_{gr} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Opseg učestanosti za koji je prethodna zadovoljena relacija naziva se propusni opseg, a može se definisati i kao opseg u kome je aktivna snaga kola veća od polovine maksimalne snage koja se u kolo ulaže pri faznoj rezonanciji.

Pa vrijedi :

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}} \qquad R = \pm(\omega L - \frac{1}{\omega C}).$$



Slika 7

Ukoliko je širina propusnog opsega manja, kažemo da je kolo selektivnije, a stepen selektivnosti kola se definiše kao odnos učestanosti kola pri faznoj rezonanciji i širine propusnog opsega:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q_{LO}$$

Selektivnost kola jednaka je Q-faktoru kola za učestanost fazne rezonancije.

Pomoću Q-faktora mogu se definisati i naponi na krajevima kondenzatora i kalema pri faznoj rezonanciji:

$$|U_{CO}| = |U_{LO}| = \frac{1}{\omega_0 C}\frac{E}{R} = \omega_0 L \frac{E}{R} = Q_{LO} E.$$

Q_{LO} faktor kalema pokazuje koliko je puta vrijednost napona na kalemu i kondenzatoru veća od napona na krajevima kola pri faznoj rezonanciji.

Primjer 2.5.

Za rezonantno kolo sa nesavršenim kalemom poznato je $R = 500\Omega, Q_L = 100$ za $f = 1MHz$. Odrediti kapacitet C da napon na kondenzatoru bude maksimalan za datu učestanost i odrediti sopstvenu frekvenciju.

$R = 500\Omega$

$Q_L = 100$

$f = 1MHz$

$C = ?\ f_0 = ?$

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi f L}{R} \rightarrow L = \frac{RQ_{LO}}{2\pi f}$$

$$L = \frac{500 \cdot 100}{2\pi \cdot 10^6} = 7{,}96mH$$

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{1 - 2\left(\frac{R}{R_C}\right)^2} \qquad R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$C = \frac{2L}{L^2 \cdot 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot f^2 + R^2} = \frac{2 \cdot 7{,}96 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{12} + 0{,}25 \cdot 10^6 \cdot (7{,}96)^2 \cdot 10^{-6}}$$

$$C = \frac{15{,}92 \cdot 10^{-3}}{5003{,}08 \cdot 10^6} = 3{,}18 \cdot 10^{-12} F$$

$$C = 3{,}18 pF$$

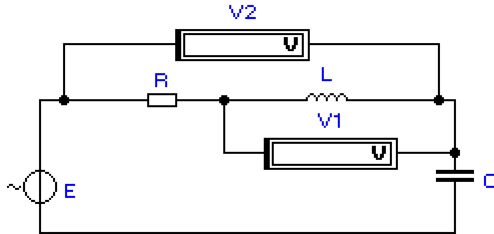
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{7{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}18 \cdot 10^{-12}}}$$

$$f_0 = 1{,}00034 MHz$$

$$f_0 = 1{,}0003 MHz$$

Primjer 2.6.

Za rezonantno sa nesavršenim kalemom poznato je ω_0=100 000 rad/s. Voltmetri V_1=50V i V_2=52,1V pokazuju aktivne vrjednosti pri faznoj rezonanciji. Odrediti vrjednost priključenog napona E i širinu propusnog opsega Δf.



ω_0=100 000 rad/s
V_1=50V
V_2=52.1V

E=?	$U_{C0}=V_1$
Δf=?	$U_{R0}=E$

Rješenje:

$$V_2=\sqrt{U_{R0}{}^2+U_{C0}{}^2}=\sqrt{E^2+V_1^2}$$

$$E=\sqrt{V_2{}^2-V_1^2}=\sqrt{52{,}1^2-50^2}=14{,}65V$$ E=14,65V

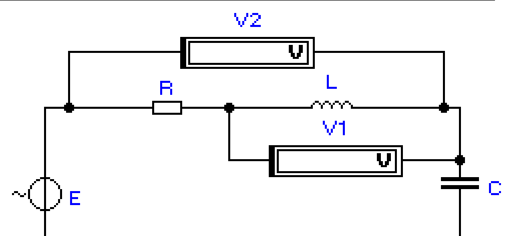
$$\Delta f=\frac{f_0}{Q_{L0}},\qquad Q_{L0}=\frac{U_{C0}}{E}=\frac{V_1}{E}=\frac{50}{14{,}65}=3{,}415$$

$$\Delta f=\frac{\omega_0}{2\pi Q_{L0}}=\frac{100000}{2\pi\cdot 3{,}415}=4660{,}9(Hz)$$

Primjer 2.7.

Za rezonantno kolo sa nesavršenim kalemom poznata je učestalost f_0=200 Hz i širina propusnog opsega Δf=4KHz. Odrediti pokazivanje voltmetra V_2 i vrijednost priključenog napona E. Ako instrument V_1 pokazuje aktivnu vrjednost V_1=100V pri faznoj rezonanciji.
f_0=200KHz
Δf=4KHz
V_1=100V ($\omega=\omega_0$)

V_2=?
E=?



Rješenje:

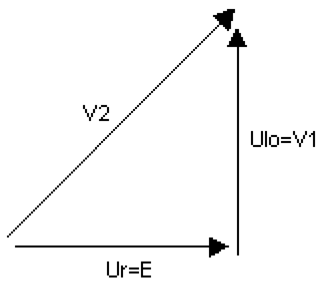
$$Q_{L0}=\frac{f_0}{\Delta f}=\frac{200\cdot 10^3}{4\cdot 10^3}=50$$

$$U_{L0} = |\omega_0 LI| = \left|\omega_0 L \frac{E}{R}\right| = Q_{L0}E$$

$$U_{L0} = V_1 = 100V$$

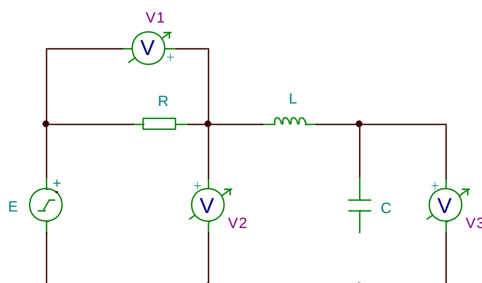
$$E = \frac{U_{L0}}{Q_{L0}} = \frac{100}{50} = 2V$$

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + E^2} = \sqrt{U_{L0}^2 + U_{R0}^2} = \sqrt{10000 + 4} = 100{,}02(V)$$



Primjer 2.8.

Za rezonantno kolo poznato je R=50 Ω, L=10mH i pokazivanje voltmetra (efektivna vrijednost napona na otporniku) V_1=3V pri rezonantnoj učestanosti (fazna) f_c= 10MHz. Odrediti pokazivanje voltmetra V_2 (napon na rednoj vezi zavojnice i kondezatora) i faktor dobrote Q_{LO} i vrijednost E, napon na kondenzatoru V_3.



$$L = 10mH$$
$$R = 50\Omega$$
$$V_1 = 3V$$
$$f_0 = 10MHz$$
$$Q_{LO}, E, V_2 = ?$$

$$|U_{RO}| = |E| = V_1$$
$$E = 3V$$
$$\vec{V}_2 = \vec{U}_{LO} + \vec{U}_{CO} = 0$$

$$Q_{LO} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{50}$$

$$Q_{LO} = 12566$$

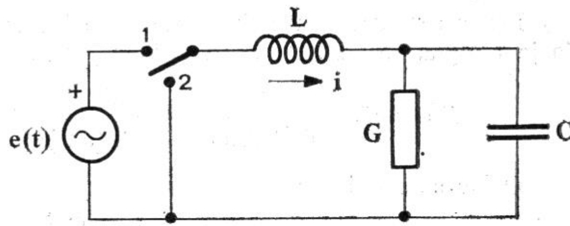
$$U_{LO} = Q_{LO} \cdot E = 12566 \cdot 3 = 37{,}7kV$$

2.5. REZONANTNO KOLO SA NESAVRŠENIM KONDENZATOROM

U slučaju da kondenzator nije idealan već da njegov dielektrik posjeduje neku konačnu provodnost G, tada o njoj moramo voditi računa, te će rezonantno kolo imati oblik dat na slici 10.

Sopstveni režim u kolu, prekidač u položaju 2, određen je jednačinama:

$$u_L + u_C = 0$$
$$i = i_C + i_G$$



Slika 10

Rješavanjem ovih jednačina dobivamo izraz za napon na kondenzatoru $u_C(t) = E_0 e^{-\sigma_S t} \sin(\omega_S t)$, gdje je

$$p_S = -\frac{G}{2C} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} = -\sigma_s \pm j\omega_s$$

Prethodna relacija određuje sopstvenu kompleksnu učestanost kola sa nesavršenim kondenzatorom.

Idealna rezonancija u rezonantnom kolu sa nesavršenim kondenzatorom nastupiće ako je kompleksna učestanost $p = -\sigma \pm j\omega$ generatora pseudoperiodičnog napona:

$$e_{(t)} = E_0 e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$$

jednaka sopstvenoj kompleksnoj učetanosti p_s kola:

$$\sigma = \sigma_s = \frac{G}{2C} \qquad \omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

Struja na krajevima kola tada ima beskonačno veliku vrijednost.

Prava rezonancije u kolu sa nesavršenim kondenzatorom nastupiće ako je kružna učestanost ω prostoperiodičnog generatora:

$$e_{(t)} = \sqrt{2} E \sin(\omega t + \theta)$$

jednaka sopstvenoj kružnoj učestanosti ω_s kola:

$$\omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

Struja u ovom slučaju neće biti u fazi sa naponom niti će njena efektivna vrijednost biti maksimalna, što se može lako pokazati. Perioda prinudnih oscilacija jednaka je periodi sopstvenih oscilacija kola čiji su krajevi kratko spojeni.

Fazna rezonancija u kolu sa nesavršenim kondenzatorom nastupiće u slučaju da je ukupna reaktivna otpornost kola jednaka nuli:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}\right)$$

Uslov se svodi na:

$$X = \omega L - \frac{\omega C}{G^2 + (\omega C)^2} = 0$$

odakle se dobijaju dva rješenja:

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{C}\right)^2}$$

Prvo rješenje odgovara jednosmjernoj struji, tada su uvijek struja i napon u faznom skladu.

Za razliku od kola sa nesavršenim kalemom, kod kola sa nesavršenim kondenzatorom efektivna vrijednost struje u kolu neće pri faznoj rezonanciji biti maksimalna, jer vrijednost impedanse kola nije minimalna za učestanost ω_2.

Kada efektivna vrijednost struje u kolu dostigne svoju maksimalnu vrijednost kažemo da je u kolu nastupila amplitudska rezonancija. Ako je kružna učestanost generatora promjenljiva, uslov amplitudske rezonancije se izražava u obliku:

$$\frac{dZ}{d\omega} = 0$$

Rješenje jednačine je:

$$\omega = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{LC}\left(2\frac{G^2}{C^2} + \frac{1}{LC}\right)} - \frac{G^2}{C^2}}$$

Napomenimo da se amplitudska rezonancija može postići i promjenom nekog drugog parametra kola.

U slučaju kola sa nesavršenim kalemom, učestanosti fazne i amplitudske rezonancije su se poklapale, jer je struja imala maksimalnu vrijednost pri faznoj rezonanciji.

U slučaju kola sa nesavršenim kondanzatorom, učestanosti prave, fazne i amplitudske rezonancije se razlikuju. Ove tri učestanosti su iste

samo kada se otpornost kalema i provodnost kondenzatora mogu zanemariti.

Slično kao i kod kalema, kvalitet kondenzatora se može definisati preko Q- faktora:

$$Q_c = \frac{\omega C}{G} = 2\pi \frac{(\omega_e)_{max}}{\omega_G}$$

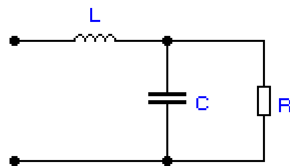
Uobičajeno je da se vrijednost Q- faktora kondenzatora zadaje za učestanost ω_0:

$$Q_{CO} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\omega_0 LG}$$

Krive rezonancije se za ovaj slučaj crtaju sličnim postupkom kao i za kolo sa nesavršenim kalemom.

Primjer 2.9.

Za rezonantno kolo sa nesavršenim kondezatorom poznato je R=10Ω , $\omega=10^6$ rad/s. Odrediti L i C tako da pri faznoj rezonanciji ulazna ipedansa kola bude 1Ω odrediti Q_{L0} i kompleksnu učestalost.



R=10Ω

$\omega=10^4$ rad/s

Rješenje:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = 1$$

$$Z = \frac{j\omega LG - \omega^2 LC + 1}{G + j\omega C} * \frac{G - j\omega C}{G - j\omega C} = j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} * \frac{G - j\omega C}{G - j\omega C} = j\omega C + \frac{G - j\omega C}{G^2 - \omega^2 C^2}$$

$$Z = \frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega C}{G^2 + \omega^2 C^2}\right) = 1 + j0$$

$$\frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2} = 1 \wedge \omega\left(L - \frac{C}{G^2 + \omega^2 C^2}\right) = 0$$

$$G = G^2 + \omega^2 C^2$$

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{G - G^2} = \frac{1}{10^6}\sqrt{0.1 - 0.1^2} = 0.3\mu F$$

$$L = \frac{C}{G^2 - \omega^2 C^2} = \frac{0.3*10^{-6}}{0.1^2 + \left(10^{-6} * 0.3*10^{-6}\right)^2} = 3\mu H$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{3*10^{-6} * 0.3*10^{-6}}} = 1.054 Mrad/s$$

$$Q_{C0} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{0.1}{2*0.3*10^{-6}} = 0.1666*10^6 rad/s$$

$$\omega_S = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - G_S^2} = \sqrt{(1.054*10^{-6})^2 - (0.1666*10^6)^{-6}} = 1.041*10^6 rad/s$$

$$\frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2} = 1 \qquad \wedge \qquad \omega\left(L - \frac{C}{G^2 + \omega^2 C^2}\right) = 0$$

$$G = G^2 + \omega^2 C^2$$

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{G - G^2} = \frac{1}{10^6}\cdot\sqrt{0,1 - 0,1^2} = 3\mu H$$

$$L = \frac{C}{G^2 + \omega^2 C^2} = \frac{0,3\cdot 10^{-6}}{0,1^2 + (10^6\cdot 0,3\cdot 10^{-6})^2} = 3\mu H$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 10^{-6}\cdot 0,3\cdot 10^{-6}}} = 1,054\cdot 10^6 rad/s$$

$$Q_{C0} = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 CR = 1,054\cdot 10^6\cdot 0,3\cdot 10^{-6}\cdot 10 = 3,16$$

$$\sigma_S = \frac{G}{2C} = \frac{0,1}{2\cdot 0,3\cdot 10^{-6}} = 0,1666\cdot 10^6 rad/s$$

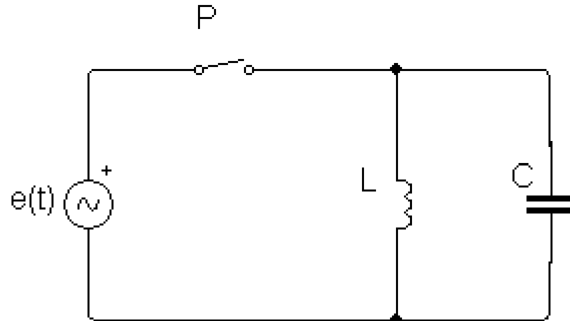
$$\omega_S = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma_S^2} = \sqrt{(1,054\cdot 10^6)^2 - (0,1666\cdot 10^6)^2} = 1,041\cdot 10^6 rad/s$$

$$p_S = -\sigma_S \pm j\omega_S$$

2. 6. PROSTO ANTIREZONANTNO KOLO

Pod prostim antirezonantnim kolom podrazumijevamo paralelnu vezu idealne zavojnice induktivnosti L i idealnog kondenzatora kapacitivnosti C, slika 11.

Ako se prekidač, prema slici 11 , otvori i kolo prepusti samo sebi, kroz kolo će i dalje proticati struja, jer u njemu je prilikom isključenja postojala neka energija koja to omogućuje.



Slika 11.

Ako prekidač ostavimo zatvoren i mijenjamo učestanost prostoperiodičnog generatora, struja na krajevima kola (kroz generator) će se mijenjati, jer se mijenja ukupna admitansa kola:

$$B = \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| \tag{1}$$

Učestanost generatora za koju struja na krajevima kola ima vrijednost nula naziva se učestanost antirezonancije, a kada vlada, kažemo da je u kolu nastala idealna antirezonancija.

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2}$$

Impedansa u tom slučaju beskonačno velika, a argument impedanse se skokovito mijenja sa – 90^{o} na vrijednost -90°.

Unutar samog antirezonantnog kola će i dalje teći struja, antirezonancije, koja će biti jednaka:

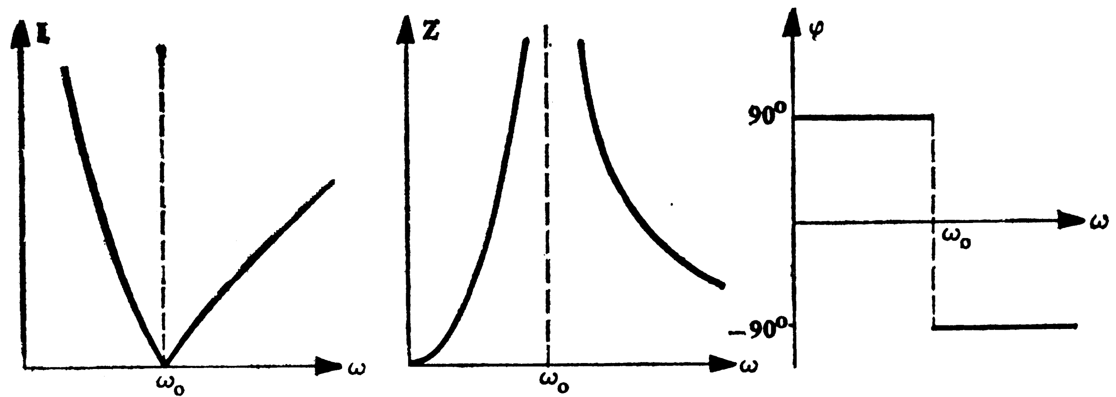
$$|I_L| = |I_C| = \frac{1}{\omega_0 L} E = \omega_0 C E \tag{3}$$

Generator ne ulaže nikakav rad za održavanje struje, a kolo se ponaša kao da je otkačeno od generatora.

Procesi koji se u njemu dešavaju su isti kao kod prostog rezonantnog kola prepuštenom samom sebi.

Krive antirezonancije, slika 12. možemo nacrtati prema relacijama:

$$Z = \left| \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} \right| \qquad I = \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| E \qquad (4)$$



Slika 12.

Primjer 2. 10.

Za prosto rezonantno kolo odrediti struju koju daje generator za slučaj $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, $\omega = \omega_0$ i $\omega = 2\omega_0$, ako je poznato $E = 5V, L = 10mH, C = 1\mu F$.

$E = 5V$

$L = 10mH$

$C = 1\mu F$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}} = 10^4 = 10000 \frac{rad}{s}$$

a) za $\omega = \omega_0 \quad Z = \infty \quad B = 0 \quad I = 0$

b) za $\omega = 2\omega_0 \quad I = \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| \cdot E$

$$I = \left| \frac{4\omega_0^2 \dfrac{1}{\omega_0^2} - 1}{2\omega_0 L} \right| \cdot E = \frac{3}{2\omega_0 L} \cdot E = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}$$

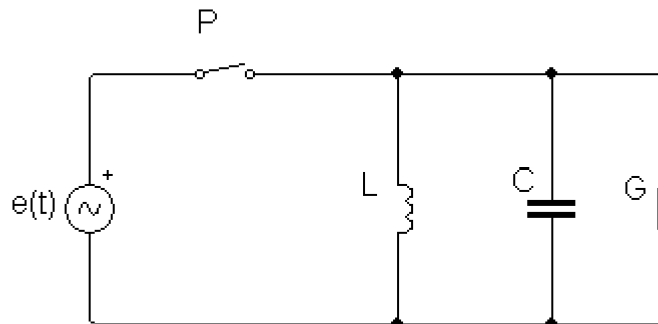
$$I = 0{,}075A$$

c) za $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$

$$I = \left| \frac{\dfrac{\omega_0^2}{4} \cdot \dfrac{1}{\omega_0^2} - 1}{\dfrac{\omega_0}{2} \cdot L} \right| \cdot E = \frac{\dfrac{3}{4} \cdot 5}{\dfrac{10^4}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 0{,}075A$$

2. 7. ANTIREZONANTNO KOLO SA NESAVRŠENIM KONDENZATOROM

U slučaju da kondenzator nije idealan, već da njegov dielektrik posjeduje neku konačnu provodnost G, tada antirezonantno kolo ima oblik prikazan na slici 13.



Slika 13.

Ako se prekidač otvori, sopstveni režim u kolu će biti isti kao i sopstveni režim rezonantnog kola sa nesavršenim kondenzatorom, pa će sopstvena kompleksna učestanost kola iznositi:

$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} = -\sigma_s \pm j\omega_s \qquad (5)$$

Idealnu antirezonanciju postići ćemo u ovakvom kolu ako kompleksnu učestanost $p = -\sigma \pm j\omega$ generatora pseudoperiodičnog napona

$$e(t) = E_0 e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \theta) \qquad (6)$$

podesimo tako da je jednaka sopstvenoj kompleksnoj učestanosti kola:

$$\sigma = \sigma_s = \frac{G}{2C} \qquad \omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} \tag{7}$$

Struja na krajevima kolaje u ovom slučaju jednaka nuli.

Ako je generator prostoperiodičan, tada se uslov idealne antirezonancije ne može postići. U kolu će se postići prava antirezonancija ako je kružna učestalost ω prostoperiodičnog generatora:

$$e(t) = \sqrt{2}E\sin(\omega t + \theta)$$

jednaka sopstvenoj učestalosti ω_s, kola:

$$\omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} \tag{8}$$

U ovom slučaju perioda prinudnih oscilacija jednaka je periodi sopstvenih oscilacija kola čiji su krajevi otvoreni.

U kolu će nastati fazna antirezonancija ako je reaktivna provodnost kola jednaka nuli:

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \tag{9}$$

Struja i napon su u fazi, admitansa ima svoju minimalnu, a impedansa maksimalnu vrijednost:

$$Y = Y_{\min} = G \qquad Z = Z_{\max} = \frac{1}{G} \tag{10}$$

Pri faznoj antirezonanciji, struje u kalemu i kondenzatoru imaju istu efektivnu vrijednost, a suprotnog su znaka:

$$I_L = -j\frac{1}{\omega_0 L}E \qquad I_C = j\omega_0 CE \tag{11}$$

Kolo se ponaša kao da nema kalema i kondenzatora, ovaj dio kola je otvoren, generator ne ulaže rad za održavanje struja u ovom dijelu kola, a u kalemu i kondenzatoru dolazi do naizmjenične izmjene elektrostatičke i elektromagnetne energije.

Kod antirezonantnog kola je zanimljivo razmotriti slučaj kad je na njegovim krajevima priključen strujni generator struje $i_0(t)$.

Tada je napon na krajevima pri idealnoj antirezonanciji beskonačno veliki, a pri faznoj antirezonanciji ima maksimalnu vrijednost koja iznosi:

$$U = U_{\max} = \frac{I_g}{G} \tag{12}$$

gdje je I_g efektivna vrijednost struje prostoperiodičnog strujnog generatora.

Krive rezonancije se mogu crtati za slučaj da je kolo priključeno na naponski generator ili na strujni generator.

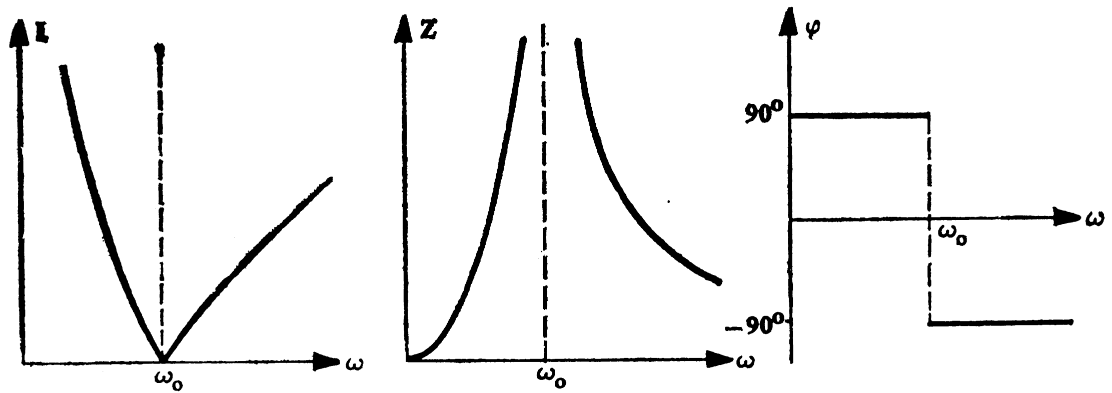
a) naponski generator

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad I = E\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$v = arctg\,\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \qquad I_G = GE$$

$$I_C = \omega CE \qquad I_L = \frac{1}{\omega L}E \tag{13}$$

Na slici 14 prikazane su krive antirezonancije za slučaj da je kružna učestanost generatora promjenljiva, da je provodnost G parametar familije krivih i da su L i G konstantni.



Slika 14.

b) strujni generator

$$U = \frac{\omega L I_g}{\sqrt{(\omega LG)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \qquad I_G = \frac{\omega LG I_g}{\sqrt{(\omega LG)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$I_C = \frac{\omega^2 LCL_g}{\sqrt{(\omega LG)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \qquad I_L = \frac{I_g}{\sqrt{(\omega LG)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \tag{14}$$

Izlazi za struje su u potpunosti dualni izrazima za napone za slučaj rezonantnog kola sa nesavršenim kondenzatorom.

Uobičajeno je da se i ovdje kao parametar uvede, umjesto provodnosti G, Q- faktor kondenzatora za učestanost ω_0, kao i pojam propusnog opsega.

Propusni opseg se definiše kao opseg učestanosti u kome efektivna vrijednost napona na krajevima kola ne opada ispod vrijednosti $\sqrt{2}$ puta manje od efektivne vrijednosti napona pri faznoj antirezonanciji (opseg u kome je snaga u kolu veća od polovine maksimalne snage). Kolo je priključeno na strujni generator prostoperiodične struje, pa je:

$$\frac{I_g}{\sqrt{G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}=\frac{I_g}{G\sqrt{2}} \qquad (15)$$

Relacija (15) je dualna odgovarajućoj relaciji za rezonantno kolo sa nesavršenim kalemom, pa je:

$$\omega_{1,2}=\pm\frac{G}{2C}+\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2+\frac{1}{LC}} \qquad (16)$$

Širina propusnog opsega je:

$$\Delta\omega=\omega_1-\omega_2=\frac{G}{C} \qquad (17)$$

Stepen selektivnosti:

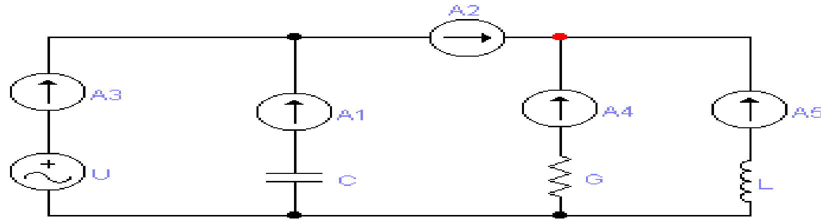
$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}=Q_{CO} \qquad (18)$$

Q_{co} faktor kondenzatora pokazuje takođe koliko su puta struje u kalemu i kondenzatoru veće od struje generatora pri faznoj antirezonanciji:

$$|I_C|=|I_L|=\omega_0 C\frac{I_g}{G}=\frac{1}{\omega_0 L}\frac{I_g}{G}=Q_{CO}I_g \qquad (19)$$

Primjer 2. 11.

U antirezonantnom kolu s nesavršenim kondenzatorom poznato je $G=0{,}1, C=10\mu F$, $\omega=10^5\frac{rad}{s}$ i $A_1=10mA$ pri faznoj razonanciji. Odrediti pokazivanje ampermetra A_2, A_3, A_5 i napon izvora.



$$\Delta\overline{\omega} = \frac{\overline{G}}{C} = \frac{0,1}{10\cdot 10^{-6}} = 10\cdot 10^{3}\frac{rad}{s}$$

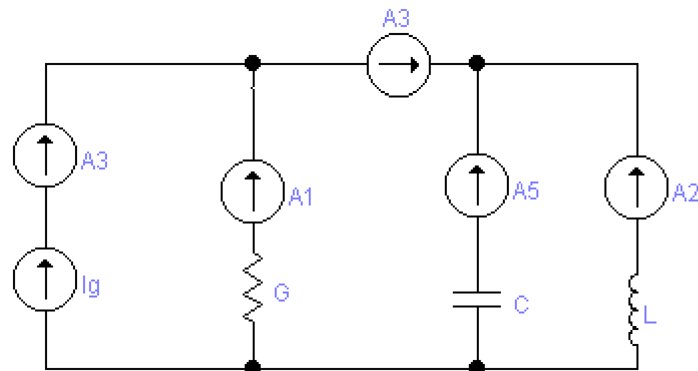
$$Q_{CO} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{10^5}{10^4} = 10 \qquad |I_C| = Q_{CO}|I_G| \rightarrow I_C = I_{A!} \qquad |I_G| = I_{A3} = I_{A4}$$

$$I_G = \frac{I_{A1}}{Q_{CO}} = \frac{10\cdot 10^{-3}}{10} = 10^{-3} = 1mA \quad I_G = U\cdot G \rightarrow U = \frac{I_G}{G} = \frac{1mA}{0,1} = 10mV$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{A4}^2 + I_{A5}^2} \qquad I_{A5} = I_{A1} = 10mA$$

Primjer 2. 12.

U antirezonantnom kolu poznato je G=1S, $\Delta f = 5kHz, f = 200kHz$ struja I_{A1}=5mA kroz ampermetar A_1 pri faznoj antirezonanciji. Odrediti pokazivanje ampermetra A_2, A_3, A_4, A_5 i induktivnost L kao kapacitivnost C i napon na kondenzatoru.



$$I_{A2} = I_{A1} = 5mA$$

$$Q_{CO} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{200\cdot 10^3}{5\cdot 10^3} = 40$$

$$Q_{CO} = \frac{I_{A4}}{I_{A1}} = \frac{I_{A4}}{I_{A2}} \rightarrow I_{A4} = Q_{CO}\cdot I_{A1} = 40\cdot 5mA = 200mA$$

$$|I_{A5}| = |I_{A4}| = 200mA$$
$$I_{A3} = 0$$
$$\Delta\omega = \frac{G}{C} \rightarrow 2\pi\Delta f = \frac{G}{C} \rightarrow C = \frac{G}{2\pi\Delta f} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3} = \frac{1}{10^4 \cdot \pi}$$
$$C = 31{,}85\mu F$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot f_0 \cdot C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 31{,}85 \cdot 10^{-6}}$$
$$L = 199mH$$
$$U_C = \frac{I_G}{G} = \frac{I_{A2}}{G} = \frac{5mA}{1S}$$
$$L = 0{,}2\mu H$$
$$U_C = 5mV$$

Primjer 2.13.

U antirezonantnom kolu poznato je $R = 100\Omega$, $C = 1\mu A$ i $\omega_0 = 10^5 \frac{rad}{s}$. Ampermetar A_1 pokazuje I_{A1}=30mA pri faznoj antirezonanci. Odrediti pokazivanje ampermetra A_2, A_3, A_4, A_5, napon izvora U i induktivnost L.

$$Q_{CO} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega = \frac{G}{C} = \frac{1}{RC} = 1$$
$$Q_{CO} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{0{,}01} = 10$$

$$Q_{CO} = \frac{I_{A1}}{I_{A2}} \rightarrow I_{A2} = \frac{I_{A1}}{Q_{CO}} = \frac{30mA}{10} = 3mA$$

$$Q_{CO} - \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 0 \qquad \Delta\omega = \frac{G}{C} \qquad Q_{CO} = \frac{\omega_0}{\frac{G}{C}} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

$$G = 0{,}01S$$

$$I_{A4} = I_{A2} = 3mA$$
$$I_{A5} = I_{A1} = 30mA$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_{A4}^2 + I_{A5}^2} = \sqrt{3^2 + 30^2} = 30{,}15mA$$

$$U = I_{A4} \cdot R = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 300mV = 0{,}3V$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{10^{10} \cdot 10^{-6}} = 0{,}1mH$$

$$L = 100\mu H$$

Primjer 2.14.

U antirezonantnom kolu poznato je $L = 1mH$, $\Delta f = 2kHz$ i $f = 100kHz$, struja kroz ampermetar A_1 je I_{A1}=10mA pri faznoj antirezonanci. Odrediti pokazivanje ampermetra A_2, A_3, A_4, A_5, kapacitet C i provodnost G.

$$I_{A2} = I_{A1} = 10mA$$

$$Q_{CO} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 50$$

$$I_{A4} = Q_{CO} \cdot I_{A2} = 50 \cdot 10mA = 500mA$$

$$I_{A5} = I_{A4} = 500mA$$

$$I_{A3} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}$$

$$\omega_0 = 2{,}53nF$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 2{,}535 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^3$$

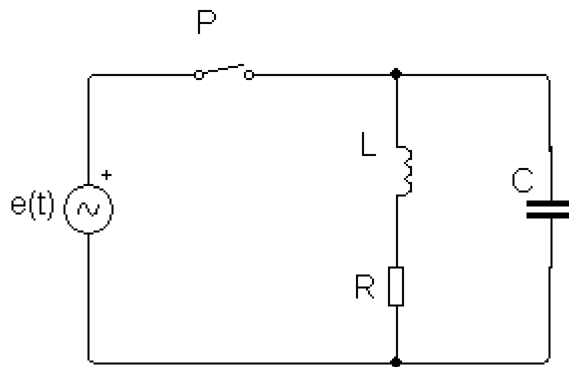
$$G = 31{,}84\mu S$$

2.8. ANTIREZONANTNO KOLO SA NESAVRŠENIM KALEMOM

Ako se otpornost kalema ne može zanemariti, antirezonantno kolo ima oblik prikazan na slici 15.

Ako se prekidač otvori, pojave u kolu će biti iste kao u rezonantnom kolu sa nesavršenom zavojnicom, pa je sopstvena kompleksna učestanost kola:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\sigma_s \pm j\omega_s \qquad (20)$$



Slika 15.

U kolu će nastupiti idealana antirezonancija ako je kompleksna učestanost $p_s = -\sigma_s \pm j\omega_s$ generatora pseudoperiodičnog napona:

$$e(t) = E_0^{-\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$$

jednaka sopstvenoj kompleksnoj učestanosti p, kola:

$$p = p_S \qquad \sigma = \sigma_s = \frac{R}{2L} \quad \omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{21}$$

U ovom slučaju je na krajevima kola struja jednaka nuli.

U kolu će nastupiti prava antirezonancija ako je kružna učestanost ω generatora prostoperiodičnog napona:

$$e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \theta)$$

jednaka sopstvenoj kružnoj učestanosti ω, kola:

$$\omega = \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (22.)$$

U ovom slučaju, perioda prinudnih oscilacija je jednaka periodi sopstvenih oscilacija kola čiji su krajevi otvoreni.

Fazna antirezonancija nastupiti u kolu za slučaj da je ukupna reaktivna provodnost kola jednaka nuli:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$$B = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0 \qquad (23)$$

Rješenja jednačine (23.)

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \qquad (24)$$

Prvo rješenje odgovara jednosmjernom naponu, a tada su struja i napon uvijek u fazi.

Za učestanost fazne antirezonancije modul admistanse nije minimalan. U kolu će nastupiti amlitudska antirezonancija za slučaj da je admitansa kola minimalna, što odgovara minimalnoj struji u kolu, ako je ono priključeno na naponski generator. U slučaju da je kružna učestanost generatora promjenjiva, uslov amlitudske antirezonancije se može izraziti u obliku:

$$\frac{dY}{d\omega} = 0 \qquad (25)$$

Rješenje jednačine (25):

$$\omega = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{2R^2}{L^2} + \frac{1}{LC}\right)} - \frac{R^2}{L^2}} \qquad (26)$$

Antirezonantno kolo sa nesavršenim kalemom se u praksi najčešće primjenjuje kao prekidač struje. Naime, ako je kružna učestanost generatora ω jednaka kružnoj učestanosti $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, impedansa kola će biti vrlo velika, a struja na krajevima kola vrlo mala, praktično jednaka nuli. Za učestanosti bliske vrijednosti ω_0 vrijednost impedanse kola brzo opada.

Primjer 2.15.

Za antirezonantno kolo sa nesavršenom zavojnicom poznato je $R = 10\Omega$ i $\omega = 10^6 \frac{rad}{s}$. Potrebno je odrediti L i C tako da ulazna admitansa kola bude $Y = 10^{-3} S$ pri faznoj antirezonanci.

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = 10^{-3}$$

$$j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + j\omega^2 L^2} = 10^{-3}$$

$$\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega\left(C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) = 10^{-3}$$

$$\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} = 10^{-3} \qquad \text{i} \qquad C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{R - YR^2}{Y}} = \frac{1}{10^6}\sqrt{\frac{10 - 10^{-3}10^2}{10^{-3}}} = 99{,}5\mu H$$

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{99{,}5 \cdot 10^{-6}}{100 + 10^{12} \cdot 9900 \cdot 10^{-12}} = 995 pF$$

$$\delta_S = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \cdot 99{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}05 \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{99{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 995 \cdot 10^{-12}}} = 3{,}178 \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_S = \sqrt{\omega_0^2 - \delta_S} = 3{,}177 \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$$

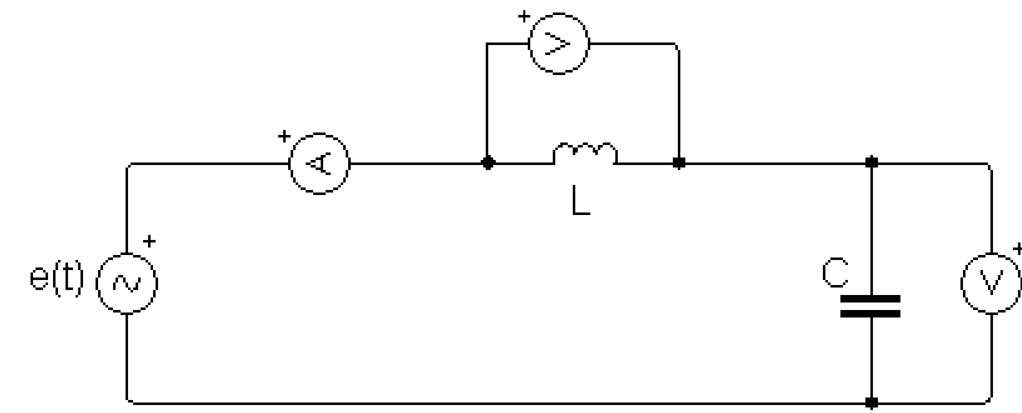
Prezime i ime		Razred	
Vježba broj 1.	**PROSTO REZONANTNO OSCILTORNO KOLO**		
Datum:		Ocjena:	
Profesor:			

1. **Cilj vježbe:**

Upoznavanje sa prostim rezonantnim oscilatornim kolom.

2. **Zadatak vježbe:**
   a) Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju prostog rezonantnog oscilatornog kola.
   b) Odrediti sopstvenu frekvenciju rezonantnog oscilatornog kola.
   c) Snimiti i nacrtati zavisnost struje u kolu u funkciji od frekvencije.
   d) Snimiti i nacrtati zavisnost napona na kalemu u funkciji od frekvencije.
   e) Snimiti i nacrtati zavisnost napona na kondenzatoru u funkciji od frekvencije.
   f) Snimiti i nacrtati zavisnost impedance kola u funkciji od frekvencije.

3. **Opis vježbe:**



Spojiti prosto rezonantno oscilatorno kolo. Priključiti voltmetar paralelno sa kalemom. Priključiti voltmetar paralelno sa kondenzatorom. Spojiti ampermetar u seriju sa kalemom i kondenzatorom. Na signal generatoru pri konstantnoj amplitudi mijenjati frekvenciju signala i pri tim vrijednostima izmjeriti struju u kolu i napone na kalemu i kondenzatoru. Na osnovu dobivenih rezultata nacrtati AFK (zavisnost veličine od frekvencije).

4. Pitanja za pripremu vježbe:

1. Iz čega se sastoji prosto rezonantno oscilatorno kolo?
2. Kako se računa sopstvena kružna frekvencija?
3. Kako se računa sopstvena frekvencija?
4. Kako se računa period spostvenih oscilacija?
5. Koliki je napon na kondenzatoru pri rezonantnoj frekvenciji?
6. Koliki je napon na kalemu pri rezonantnoj frekvenciji?
7. Kolika je struja u kolu pri rezonantnoj frekvenciji?
8. Kolika je impendansa u kolu pri rezonantnoj frekvenciji?

5. Popis korištene opreme:

- Signal generator____________________________
- 2 voltmetra_________________________________
- Ampermetar________________________________
- Kalem_____________________________________
- Kondenzator_______________________________
- spojni kabl

6. Tabelarni i grafički prikaz rezultata ogleda

f(Hz)	1	10	100	1K	10K	100K	f_{rez}	$0.9f_{rez}$	$1.1f_{rez}$
I									
U_L									
U_C									
Z									

7. Zaključak

Prezime i ime				Razred	
Vježba broj 2.	**REZONANTNO OSCILTORNO KOLO SA NESAVRŠENIM KALEMOM**				
Datum:		Ocjena:		Profesor:	

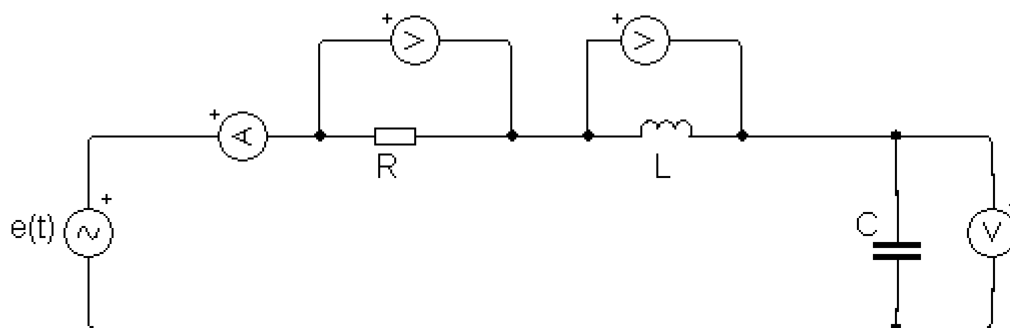
1. **Cilj vježbe:**

Upoznavanje sa rezonantnim kolom sa nesavršenim kalemom.

2. **Zadatak vježbe:**

a) Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju rezonantnog oscilatornog kola sa nesavršenim kalemom.
b) Odrediti sopstvenu frekvenciju rezonantnog oscilatornog kola sa nesavršenim kalemom.
c) Snimiti i nacrtati zavisnost struje u kolu u funkciji od frekvencije.
d) Snimiti i nacrtati zavisnost napona na otporniku u funkciji od frekvencije.
e) Snimiti i nacrtati zavisnost napona na kalemu u funkciji od frekvencije.
f) Snimiti i nacrtati zavisnost napona na kondenzatoru u funkciji od frekvencije.
g) Snimiti i nacrtati zavisnost impedance kola u funkciji od frekvencije.
h) Odrediti Q-faktor kola?
i) Odrediti širinu propusnog opsega?

3. **Opis vježbe:**



Spojiti rezonantno oscilatorno kolo sa nesavršemin kalemom. Pklirjučiti voltmetar paralelno sa otpornikom. Priključiti voltmetar paralelno sa kalemom. Priključiti voltmetar paralelno sa kondenzatorom. Spojiti ampermetar u seriju sa otpornikm, kalemom i kondenzatorom. Na signal generatoru pri konstantnoj amplitudi mijenjati frekvenciju signala i pri tim vrijednostima izmjeriti struju u kolu i napone na otporniku, kalemu i kondenzatoru. Na osnovu dobivenih rezultata nacrtati AFK (zavisnost veličine od frekvencije).

4. Pitanja za pripremu vježbe:

1. Iz čega se sastoji rezonantno oscilatorno kolo sa nesavršenim kalemom?
2. Kako se računa sopstvena kružna frekvencija?
3. Kako se računa frekvencija pri kojoj je napon na kalemu maksimalan?
4. Kako se računa frekvencija pri kojoj je napon na kondenzatoru maksimalan?
5. Kolika je struja u kolu pri rezonantnoj frekvenciji?
6. Kolika je impendansa u kolu pri rezonantnoj frekvenciji?

5. Popis korištene opreme:

- Signal generator___________________________
- 3 voltmetra________________________________
- Ampermetar_______________________________
- Otpornik__________________________________
- Kalem_____________________________________
- Kondenzator______________________________
- spojni kabl

6. Tabelarni i grafički prikaz rezultata ogleda

f(Hz)	1	10	100	1K	10K	100K	f_{rez}	f_1	f_2
I									
U_R									
U_L									
U_C									
Z									

7. Zaključak

___

___

___

___

Prezime i ime			Razred	
Vježba broj 3.	**PROSTO ANTIREZONANTNO OSCILTORNO KOLO**			
Datum:		Ocjena:		Profesor:

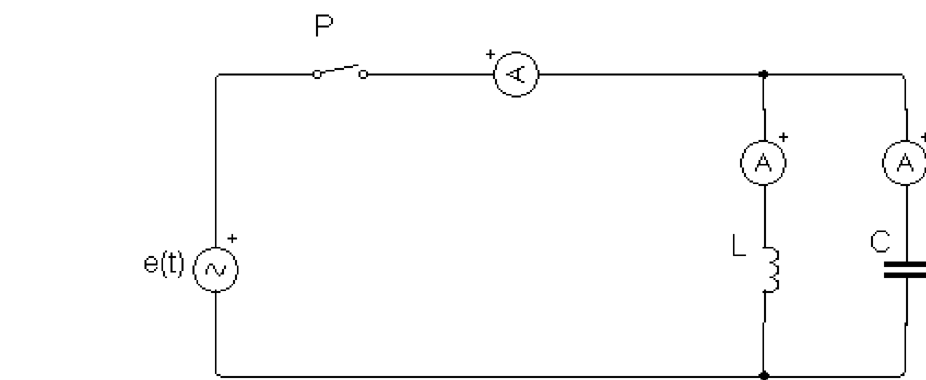
1. **Cilj vježbe:**

Upoznavanje sa prostim antirezonantnim oscilatornim kolom.

2. **Zadatak vježbe:**

a) Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju prostog antirezonantnog oscilatornog kola.
b) Odrediti sopstvenu frekvenciju prostog antirezonantnog oscilatornog kola.
c) Snimiti i nacrtati zavisnost struje kalema u kolu u funkciji od frekvencije.
d) Snimiti i nacrtati zavisnost struje kondenzatora u kolu u funkciji od frekvencije.
e) Snimiti i nacrtati zavisnost struje u kolu u funkciji od frekvencije.
f) Snimiti i nacrtati zavisnost impedance kola u funkciji od frekvencije.
g) Snimiti i nacrtati zavisnost admitanse kola u funkciji od frekvencije.

3. **Opis vježbe:**



Spojiti prosto atinrezonantno oscilatorno kolo. Spojiti ampermetar u seriju sa kalemom. Spojiti ampermetar u seriju sa kondenzatorom. Spojiti ampermetar sa paralenom vezom LC elemenata. Na signal generatoru pri konstantnoj amplitudi mijenjati frekvenciju signala i pri tim vrijednostima izmjeriti ukupnu struju u kolu i struje kroz kalem i kondenzator. Na osnovu dobivenih rezultata nacrtati AFK (zavisnost veličine od frekvencije).

4. **Pitanja za pripremu vježbe:**

1. Iz čega se sastoji prosto antirezonantno oscilatorno kolo?
2. Kako se računa sopstvena kružna frekvencija?

3. Kako se računa sopstvena frekvencija?
4. Kolika je struja u kolu pri antirezonantnoj frekvenciji?
5. Kolika je impendansa u kolu pri antirezonantnoj frekvenciji?

5. Popis korištene opreme:

- Signal generator__________________________
- Voltmetar________________________________
- 2 ampermetra____________________________
- Kalem___________________________________
- Kondenzator______________________________
- spojni kabl

6. Tabelarni i grafički prikaz rezultata ogleda

f(Hz)	1	10	100	1K	10K	100K	f_{rez}	$0.9f_{rez}$	$1.1f_{rez}$
I									
I_L									
I_C									
Z									
Y									

7. Zaključak

____
____
____
____

Prezime i ime		Razred	
Vježba broj 4.	**ANTIREZONANTNO OSCILTORNO KOLO SA NESAVRŠENIM KONDENZATOROM**		

Datum:		Ocjena:		Profesor:	

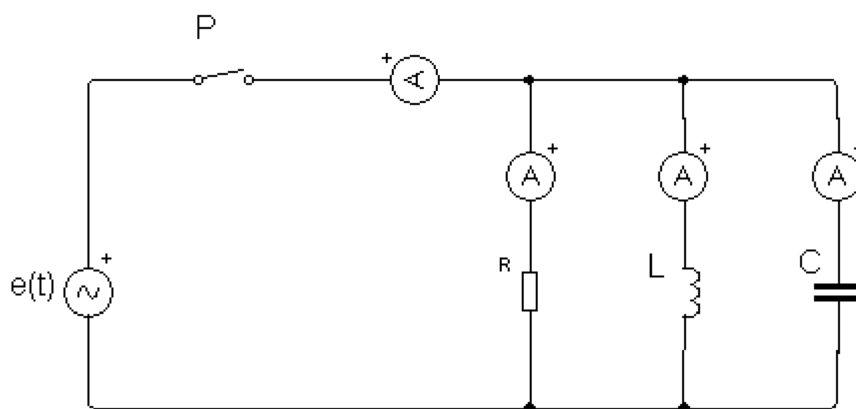
1. **Cilj vježbe:**

Upoznavanje sa antirezonantnim oscilatornim kolom sa nesavršenim kondenzatorom

2. **Zadatak vježbe:**

a) Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju antirezonantnog oscilatornog kola sa nesavršenim kondenzatorom.
b) Odrediti sopstvenu frekvenciju antirezonantnog oscilatornog kola sa nesavršenim kondenzatorom.
c) Snimiti i nacrtati zavisnost struje kroz otpornik u kolu u funkciji od frekvencije.
d) Snimiti i nacrtati zavisnost struje kalema u kolu u funkciji od frekvencije.
e) Snimiti i nacrtati zavisnost struje kondenzatora u kolu u funkciji od frekvencije.
f) Snimiti i nacrtati zavisnost struje u kolu u funkciji od frekvencije.
g) Snimiti i nacrtati zavisnost impedance kola u funkciji od frekvencije.
h) Snimiti i nacrtati zavisnost admitanse kola u funkciji od frekvencije.

3. **Opis vježbe:**



Spojiti atinrezonantno oscilatorno kolo sa nesavršenim kondenzatorom. Spojiti ampermetar u seriju sa otpornikom. Spojiti ampermetar u seriju sa kalemom. Spojiti ampermetar u seriju sa kondenzatorom. Spojiti ampermetar sa paralenom vezom RLC elemenata. Na signal generatoru pri konstantnoj amplitudi mijenjati frekvenciju signala i pri tim vrijednostima izmjeriti ukupnu struju u kolu i struje kroz

otpornik,kalem i kondenzator. Na osnovu dobivenih rezultata nacrtati AFK (zavisnost veličine od frekvencije).

4. **Pitanja za pripremu vježbe:**

1) Iz čega se sastoji antirezonantno oscilatorno kolo sa nesavršenim kondenzatorom?
2) Kako se računa sopstvena kružna frekvencija?
3) Kako se računa sopstvena frekvencija?
4) Kolika je struja u kolu pri antirezonantnoj frekvenciji?
5) Kolika je impendansa u kolu pri antirezonantnoj frekvenciji?

5. **Popis korištene opreme:**

- Signal generator_________________________
- Voltmetar_______________________________
- 3 ampermetra____________________________
- Otpornik_________________________________
- Kalem___________________________________
- Kondenzator______________________________
- spojni kabl

6. **Tabelarni i grafički prikaz rezultata ogleda**

f(Hz)	1	10	100	1K	10K	100K	f_{rez}	$0.9f_{rez}$	$1.1f_{rez}$
I									
I_R									
I_L									
I_C									
Z									
Y									

71

7. Zaključak